

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**



**“MODELADO NUMÉRICO DEL CRECIMIENTO Y DENSIFICACIÓN  
DE ESCARCHA SOBRE SUPERFICIES CON FLUJO CRUZADO”**

**POR**  
**I.Q. VÍCTOR IVÁN MADRID MORELOS**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA CON ORIENTACIÓN EN ENERGÍAS TÉRMICA Y  
RENOVABLE**

**NOVIEMBRE, 2015**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**  
**SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



**“MODELADO NUMÉRICO DEL CRECIMIENTO Y DENSIFICACIÓN  
DE ESCARCHA SOBRE SUPERFICIES CON FLUJO CRUZADO”**

**POR**  
**I.Q. VÍCTOR IVÁN MADRID MORELOS**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA CON ORIENTACIÓN EN ENERGÍAS TÉRMICA Y  
RENOVABLE**

**ASESOR: DR. FAUSTO ALEJANDRO SÁNCHEZ CRUZ**  
**CO-ASESOR: DR. MAX SALVADOR HERNÁNDEZ**

**NOVIEMBRE, 2015**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

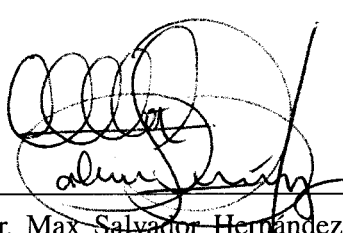
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA


SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

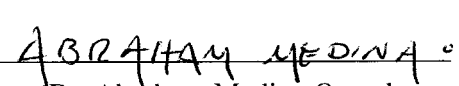
Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la tesis "Modelado numérico del crecimiento y densificación de escarcha sobre superficies con flujo cruzado" realizada por el estudiante VÍCTOR IVÁN MADRID MORELOS, con número de matrícula 1696694, sea aceptada para su defensa en opción al grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería con Orientación en Energías Térmica y Renovable.

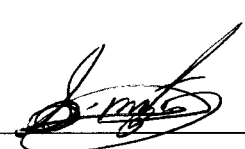
El Comité de Tesis

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Fausto Alejandro Sánchez Cruz  
Asesor

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Max Salvador Hernández  
Co-Asesor

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Santos Méndez Díaz  
Revisor

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Abraham Medina Ovando  
Revisor

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Simón Martínez Martínez  
Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, N.L. a 13 de Noviembre del 2015

*“Beneath this mask there is more than flesh,  
beneath this mask there is an idea...  
and ideas are bulletproof.”*

---

Alan Moore, V for Vendetta



## **Agradecimientos.**

Principalmente a mi familia: mi padre Humberto Madrid de la Vega, mi madre Silvia Carmen Morelos Escobar y mi hermano Alejandro Madrid Morelos porque siempre estuvieron conmigo, apoyándome incondicionalmente en todo.

A mi novia Beatriz Adilene Rodríguez Villanueva por su apoyo incondicional para realizar este sueño y por sus constantes palabras de aliento.

A mis amigos que siempre me animaron cuando las cosas no salían de la mejor manera y nunca dejaron que me diera por vencido.

A la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, especialmente al Grupo de Energías Térmica y Renovable (GETR) por abrirme sus puertas y haberme dado la oportunidad de trabajar en tantos proyectos, especialmente en la investigación para la realización de mi tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por haberme otorgado la beca para realizar este proyecto mediante el No. de Apoyo 372541.

A mi asesor, el Dr. Fausto Alejandro Sánchez Cruz por todas sus enseñanzas dentro y fuera del aula de clases y por haberme asesorado y guiado a través de esta investigación.

A todos mis compañeros de la maestría, principalmente a los de mi generación, Adolfo Benítez, César Ramírez, Mario Chapa y Luis Valdez por haber compartido tantas cosas y siempre apoyarnos para salir adelante todos juntos. A los de generaciones anteriores, Carlos Uder, Rosario Rodríguez, René Mondragón, Ricardo Delgado, Yonathan Loredo, Hugo Ramírez, etc, por haberme guiado y por compartir parte de su experiencia y conocimientos conmigo. A los de generaciones posteriores y en general a todos los estudiantes de la maestría, todos aportaron algo en algún momento aunque no se dieran cuenta.

A todos los profesores que ayudaron en mi formación y compartieron gran parte de sus conocimientos conmigo, sobre todo el Dr. Simón Martínez por su apoyo en los primeros meses de estancia en la ciudad, al Dr. Arturo Fuentes, Dr. Santos Méndez y la Dra. Elvira

Martínez por sus excelentes clases y los conocimientos transferidos. Al resto del comité de tesis, Dr. Max Salvador Hernández y Dr. Abraham Medina Oviedo por su disposición.

A las empresas *Alimentos Santa Isabel* y *Owens Corning* por abrirme las puertas y permitirme trabajar en los proyectos correspondientes, los cuales me proporcionaron una experiencia y conocimientos muy grandes.

# ÍNDICE GENERAL

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Resumen . . . . .	1
1.2. Motivación . . . . .	2
1.3. Antecedentes . . . . .	3
1.3.1. Flujo cruzado sobre cilindros porosos . . . . .	3
1.3.2. Formación y crecimiento de escarcha . . . . .	5
1.3.3. Flujo de aire con crecimiento de escarcha . . . . .	6
1.4. Hipótesis . . . . .	10
1.5. Objetivos . . . . .	10
1.5.1. Objetivo general . . . . .	10
1.5.2. Objetivos específicos . . . . .	10
<b>2. Ecuaciones de gobierno</b>	<b>12</b>

---

2.1. Balance general . . . . .	13
2.2. Continuidad . . . . .	14
2.3. Cantidad de movimiento . . . . .	18
2.4. Energía . . . . .	23
2.5. Especies . . . . .	29
2.6. Fracción de volumen . . . . .	32
2.7. Modelo de nucleación . . . . .	33
2.8. Términos fuente . . . . .	36
<b>3. Método numérico</b>	<b>37</b>
3.1. Volúmenes finitos . . . . .	39
3.2. Características de la malla . . . . .	45
3.3. Propiedades físicas . . . . .	48
3.4. Término transitorio . . . . .	51
3.4.1. Esquema explícito . . . . .	54
3.4.2. Esquema Crank-Nicholson . . . . .	54
3.4.3. Esquema totalmente implícito . . . . .	55
3.5. Esquemas convectivos . . . . .	55
3.5.1. Diferencias centrales . . . . .	56
3.5.2. Esquema Upwind . . . . .	60
3.6. Ecuación final discretizada . . . . .	61
3.7. Campo de flujo . . . . .	64
3.7.1. Mallas desplazadas . . . . .	66
3.7.2. Corrección de presión y velocidad . . . . .	67
3.7.3. Algoritmo SIMPLE . . . . .	71
3.8. Método de solución . . . . .	72

---

<b>4. Metodología</b>	<b>78</b>
4.1. Fases y componentes del sistema . . . . .	78
4.2. Modelo matemático . . . . .	79
4.2.1. Fracción de volumen . . . . .	79
4.2.2. Campo de flujo . . . . .	80
4.2.3. Conservación de la energía . . . . .	80
4.2.4. Conservación de especies . . . . .	81
4.3. Propiedades . . . . .	81
4.4. Diseño de experimentos . . . . .	84
4.5. Código numérico . . . . .	85
4.6. Coordenadas rectangulares . . . . .	86
4.6.1. Definición del problema . . . . .	86
4.6.2. Dominio y discretización . . . . .	87
4.6.3. Condiciones iniciales y de frontera . . . . .	88
4.7. Coordenadas cilíndricas . . . . .	89
4.7.1. Definición del problema . . . . .	89
4.7.2. Dominio y discretización . . . . .	91
4.7.3. Condiciones iniciales y de frontera . . . . .	91
<b>5. Resultados</b>	<b>94</b>
5.1. Rectangulares . . . . .	94
5.1.1. Campo de velocidades . . . . .	95
5.1.2. Distribución de temperatura . . . . .	96
5.1.3. Fracción de volumen de sólido . . . . .	97
5.2. Propiedades . . . . .	103
5.3. Cilíndricas . . . . .	107

---

<b>6. Conclusiones</b>	<b>117</b>
6.1. Trabajo futuro . . . . .	120
<b>Nomenclatura</b>	<b>122</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>130</b>
<b>A. Coeficientes resultantes de la discretización de las ecuaciones de gobierno.</b>	<b>138</b>
A.1. Fracción de volumen de sólido . . . . .	139
A.2. Cantidad de movimiento . . . . .	140
A.3. Continuidad . . . . .	142
A.4. Energía . . . . .	143
A.5. Especies . . . . .	144
A.6. Coordenadas cilíndricas . . . . .	146

# ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Resultados del crecimiento de escarcha y distribución de velocidad reportados por Lenic . . . . .	7
1.2. Isotermas en el dominio de la escarcha y del aire reportados por Lenic . . .	8
1.3. Resultados del crecimiento de escarcha y distribución de fracción volumen de sólido reportado por Cui en 2011 . . . . .	9
1.4. Variación de las propiedades de la escarcha reportados por Cui en 2011 . .	9
2.1. Elemento de fluido para las ecuaciones de conservación . . . . .	14
2.2. Componentes de los esfuerzos viscosos en las caras de un elemento de fluido	19
2.3. Componentes de los esfuerzos en la dirección $x$ . . . . .	20
2.4. Componentes del vector de flujo de calor. . . . .	26
2.5. Flujo másico que atraviesa todas las fronteras del elemento de fluido. . . .	30
3.1. Representación de un dominio discreto o malla . . . . .	38

3.2. Conjunto de puntos de la malla para una dimensión. . . . .	40
3.3. Ajuste a una tendencia lineal de $T$ entre nodos adyacentes. . . . .	42
3.4. Esquema representativo de una malla con las caras de los volúmenes de control en el punto medio de la distancia entre dos puntos adyacentes. . .	47
3.5. Esquema representativo de una malla con los puntos en el centro de los volúmenes de control. . . . .	48
3.6. Esquema representativo de dos puntos de una malla en una dimensión. . .	49
3.7. Variación de la temperatura en el tiempo para los tres esquemas. . . . .	53
3.8. Predicción de la variable $\phi_p$ a diferentes números de Peclet para distintos esquemas de convección. . . . .	59
3.9. Campo de presión tipo zig-zag. . . . .	65
3.10. Mallas desplazadas para la velocidad en las direcciones $x$ y $y$ . . . . .	67
3.11. Aplicación del método TDMA línea por línea en dos dimensiones. . . . .	76
4.1. Diagrama de flujo del algoritmo de solución . . . . .	86
4.2. Esquema de la geometría propuesta para coordenadas rectangulares. . . .	87
4.3. Porción de la malla empleada para el estudio numérico. . . . .	88
4.4. Dibujo esquemático de las condiciones de frontera para coordenadas rectangulares. . . . .	90
4.5. Esquema de la geometría propuesta para coordenadas cilíndricas. . . . .	90
4.6. Malla cilíndrica empleada para el estudio numérico. . . . .	92
4.7. Dibujo esquemático de las condiciones de frontera para coordenadas cilíndricas . . . . .	93
5.1. Comparación del campo de velocidades entre $u_{1h1}$ y $u_{2h1}$ para $t = 54 s$ .	95
5.2. Comparación de los perfiles de velocidad entre $u_{1h1}$ y $u_{2h1}$ para diferentes valores de $x$ para $t = 54 s$ . . . . .	97



5.3. Comparación de la distribución de temperaturas entre u1h1 y u2h1 para $t = 54 s$ . . . . .	98
5.4. Comparación de los perfiles de temperatura entre u1h1 y u2h1 para diferentes valores de $x$ para $t = 54 s$ . . . . .	99
5.5. Comparación de la distribución de fracción de volumen de sólido entre u1h1 y u2h2 para $t = 54 s$ . . . . .	100
5.6. Perfiles de fracción de volumen de sólido para diferentes valores de $x$ a $t = 26 s$ . . . . .	101
5.7. Perfiles de fracción de volumen de sólido para diferentes valores de $x$ a $t = 54 s$ . . . . .	101
5.8. Perfiles de fracción de volumen de sólido para diferentes tiempos a $x = 0.1 m$	102
5.9. Perfiles de fracción de volumen de sólido para diferentes tiempos a $x = 0.3 m$	102
5.10. Distribución de fracción de volumen de sólido para $t = 1320 s$ y a condición u1h1. . . . .	102
5.11. Espesor de la escarcha a lo largo de la placa fría para la condición u1h1. .	103
5.12. Perfiles de fracción de volumen para diferentes valores de $x$ a $t = 1320 s$ y condición u1h1. . . . .	104
5.13. Distribución de porosidad alrededor del cilindro interior. . . . .	105
5.14. Distribución de densidad, conductividad térmica y calor específico dentro de la capa de escarcha . . . . .	106
5.15. Acercamiento a la estela generada por el cilindro. . . . .	106
5.16. Distribución de temperaturas en coordenadas cilíndricas . . . . .	107
5.17. Perfiles de la magnitud de velocidad para varias posiciones angulares a las condiciones u1h1 y u2h1 a $t = 3600 s$ . . . . .	109
5.18. Perfiles de temperatura para varias posiciones angulares a las condiciones u1h1 y u2h1 a $t = 3600 s$ . . . . .	110

5.19. Espesor de la capa de escarcha alrededor del cilindro para los casos $u1h1$ y $u2h1$ a $t = 3600 s$ . . . . .	111
5.20. Relación del espesor respecto al promedio para cada condición, $u1h1$ y $u2h1$ a $t = 3600 s$ . . . . .	111
5.21. Perfiles de fracción de volumen en función del espesor adimensional $\varepsilon_a$ a diferentes tiempos y distintos ángulos $\theta$ para la condición $u1h1$ . . . . .	112
5.22. Distribución de densidad adimensional en función del espesor adimen- sional de la capa de escarcha para diferentes ángulos adimensionales a $t = 3600 s$ y a condición $u1h1$ . . . . .	113
5.23. Variación de la conductividad térmica efectiva en función del espesor adi- mensional de la capa de escarcha para diferentes tiempos y a distintos ángulos para la condición $u1h1$ . . . . .	114
5.24. Flujo de masa a lo largo del espesor de la escarcha para diferentes ángulos a $t = 3600 s$ y condición $u1h1$ . . . . .	116
5.25. Flujo de masa a lo largo del espesor de la escarcha para diferentes tiempos y a distintas condiciones a $\theta = \pi/2$ . . . . .	116

# ÍNDICE DE CUADROS

4.1. Valores de los coeficientes del ajuste polinomial para las propiedades del aire seco. . . . .	82
4.2. Valores de los coeficientes del ajuste polinomial para las propiedades del vapor de agua. . . . .	82
4.3. Valores de los coeficientes del ajuste polinomial para las propiedades del hielo. . . . .	83
4.4. Pesos moleculares y constantes críticas para el cálculo de la difusividad másica . . . . .	84
4.5. Matriz de casos de estudio analizados. . . . .	84

# CAPÍTULO

## 1

# INTRODUCCIÓN

## 1.1. Resumen

La formación de escarcha en placas planas y cilindros es de gran importancia debido a que son parte de la geometría típica de un evaporador de tipo tubos y aletas de la mayoría de los sistemas de refrigeración domésticos, ya sean refrigeradores o aires acondicionados. El espesor y densidad de la escarcha puede influir tanto positiva como negativamente en la transferencia de calor entre el aire y el refrigerante teniendo así un papel importante en el desempeño del evaporador. En el presente estudio se modela matemáticamente la formación, crecimiento y densificación de escarcha sobre superficies planas y cilíndricas sujetas a flujo cruzado de aire húmedo con diversos números de Reynolds. La formación

de escarcha se debe a la humedad contenida en el aire que, al entrar en contacto con una superficie a una temperatura inferior a su temperatura de congelación, pasa por un proceso de cambio de fase. Es posible modelar este proceso si se utilizan ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento, energía y materia para cada fase (gaseosa y sólida), así como para cada componente de la fase gaseosa (aire seco y humedad). Para determinar la masa de agua que pasa de fase gaseosa a sólida es necesario realizar un balance de materia molecular. Esta masa depositada se utiliza como término fuente de masa para la fase sólida y como sumidero para la fase gaseosa. Dichas fuentes y sumideros de masa afectan también a la conservación de cantidad de movimiento y energía en ambas fases. Entonces se calcula la fracción volumétrica de sólido local considerando formalmente como escarcha fracciones superiores a cierto valor crítico. En base a dicha fracción volumétrica se calculan las propiedades de la escarcha tales como densidad y conductividad térmica observando así sus cambios temporales y espaciales.

## 1.2. Motivación

Según la SENER en 2008, del consumo total de energía eléctrica en una residencia, el 39 % es consumido por el refrigerador, siendo así el aparato eléctrico que más energía consume. Es por esto que existe interés en desarrollar conocimiento y tecnología que conlleven a una disminución en el consumo energético así como a un aumento en la eficiencia energética de dichos electrodomésticos. En la actualidad, prácticamente todos los sistemas de refrigeración domésticos se basan en la compresión del vapor de refrigerante y tienen cuatro componentes principales: compresor, condensador, válvula de expansión y evaporador, siendo este último la parte fría del sistema. El evaporador suele transportar el refrigerante líquido a una temperatura por debajo del punto de congelación del agua por lo que, al pasar el aire húmedo alrededor de éste, la humedad sufre un cambio de fase de gas a sólido para formar escarcha. El espesor de dicha escarcha juega un papel fundamen-

tal en la transferencia de calor; a espesores pequeños actúa como una extensión del área del intercambiador de calor aumentando así la transferencia de energía, mientras que al superar cierto espesor crítico empieza a comportarse como aislante térmico. El estudio de la formación de escarcha es entonces crucial para determinar las condiciones óptimas a las que debe trabajar un refrigerador con el objetivo de aprovechar al máximo la energía térmica.

### **1.3. Antecedentes**

El presente estudio consta de varios fenómenos acoplados entre sí: el flujo de aire circulando alrededor de un cilindro y la formación de escarcha. Los fenómenos se consideran acoplados debido a que interactúan entre sí, el campo de velocidades, temperatura y humedad del aire afectan a la formación de escarcha, y a su vez el crecimiento de escarcha afecta al campo de velocidades, humedad y temperatura del aire. Estos fenómenos han sido ampliamente estudiados en el pasado, ya sea por separado o en conjunto.

#### **1.3.1. Flujo cruzado sobre cilindros porosos**

En cuanto al flujo cruzado sobre cilindros porosos se tienen estudios en diferentes geometrías, ya sea los típicos cilindros circulares como los estudiados por Kieft (1999)[1], Kurdyumov (2001) [2], Ait Saada (2006) [3], Bhattacharyya (2006 [4], 2009 [5], 2009 [6]) Ozlap (2010) [7], Bhattacharya (2010) [8], Yu (2011) [9], Al-Salem (2011) [10], Tahavvor (2011) [11], Rashidi (2013) [12], o geometrías menos convencionales como cilindros elípticos (Cheng 2007 [13]), trapezoidales (Chen 2008 [14]), cuadrados (Yu 2010 [15], Dhinakaran 2011 [16]) o arreglos circulares de cilindros (Nicolle 2011 [17]).

En estos trabajos se estudia la distribución de velocidades y, en algunos casos, de temperatura del aire tanto fuera como dentro del medio poroso. Se ha observado que la estela

puede comenzar a formarse incluso dentro del medio poroso dependiendo del número de Darcy y del número de Reynolds estudiado. Para modelar este fenómeno es necesario resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales por lo general acopladas entre sí. Estos modelos pueden ser basados en velocidad como las ecuaciones de Navier-Stokes para el medio fluido y una combinación de los modelos de Darcy, Brinkman y Forchheimer para el medio poroso (Bhattacharyya 2009 [5], Ozlap 2010 [7], Chen 2008 [14], Dhinakaran 2011 [16], Basu 1999 [18], Cui 2011 [19], Huang 2012 [20], Perng 2012 [21]), funciones de corriente y vorticidad (Kieft 1999 [1], Bhattacharya 2010 [8], Ismail 1997 [22]) o ecuaciones de capa límite (Cheng 2007 [13], Raju 1993 [23], Lenic 2009 [24]). Algunos incluso incluyen los efectos de la turbulencia (Yun 2002 [25], Yang 2006 [26]), por lo general introduciendo el modelo  $k-\varepsilon$ .

Uno de los estudios más significativos en el tema es el realizado por Bhattacharyya en 2009 [5] donde estudian la transferencia de calor de un cilindro sólido con una envoltura porosa. Se considera la región porosa como *pseudo fluido* y la fase líquida como continua mediante la adaptación de un parámetro binario en las ecuaciones de transporte. Se utiliza un modelo de Brinkman para expresar la ecuación de gobierno en el medio poroso y las ecuaciones de Navier-Stokes para describir el flujo fuera del medio poroso. Además, las ecuaciones se adimensionalizan para obtener ecuaciones en función de los números de Reynolds, Prandtl, Grashoff y Darcy, resultando en el modelo descrito en las ecuaciones (1.1) a (1.4).

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v)}{\partial \theta} = 0 \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left( v \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} \right) \\ - \frac{2B}{ReDa} u + \frac{Gr}{Re^2} T \sin \theta \quad (1.2) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left( v \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{uv}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right) - \frac{2B}{ReDa} v + \frac{Gr}{Re^2} T \cos \theta \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left( v \frac{\partial T}{\partial \theta} + u \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{2Rc}{RePr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (1.4)$$

El parámetro binario  $B$  toma un valor de 1 para el medio poroso y 0 para el medio fluido, de esta manera, fuera del medio poroso el modelo se convierte en las ecuaciones de Navier-Stokes. Al resolver este modelo se obtienen distribuciones de velocidad y temperatura tanto alrededor como dentro del medio poroso. Se observan las variaciones del número de Nusselt para cuantificar la transferencia de calor desde el cilindro, con lo que al variar el radio de la envoltura porosa se encuentra una transferencia de calor máxima asociada con un radio crítico. También se calcula la vorticidad generada por el cilindro envuelto en material poroso para observar los vórtices de von Karman corriente abajo de dicho obstáculo y se cuantifica la frecuencia de los vórtices.

### 1.3.2. Formación y crecimiento de escarcha

Por otro lado, se encuentran los estudios sobre la formación, crecimiento y densificación de escarcha. Para estos estudios es necesario resolver la ecuación de conservación de masa para la humedad del aire que pasará a formar parte de la escarcha. En general se plantea un balance de energía y materia en un volumen de control de escarcha, ya sea en una o dos dimensiones (Raju 1993 [23], Ismail 1997 [22], Yun 2002 [25], Lee 2003 [27], Seker 2004 [28], Na 2004 [29], Yang 2006 [26], Lenic 2009 [24], Hermes 2009 [30], Tahavvor 2010 [31], Padhmanabhan 2011 [32], Barzanoni 2012 [33], Wang 2012 [34], El Cheikh 2014 [35]). Otro método de resolver el dominio de la escarcha es utilizando el método de promedio de volúmenes locales (Tao 1993 [36], Le Gall 1997 [37], Cui 2011

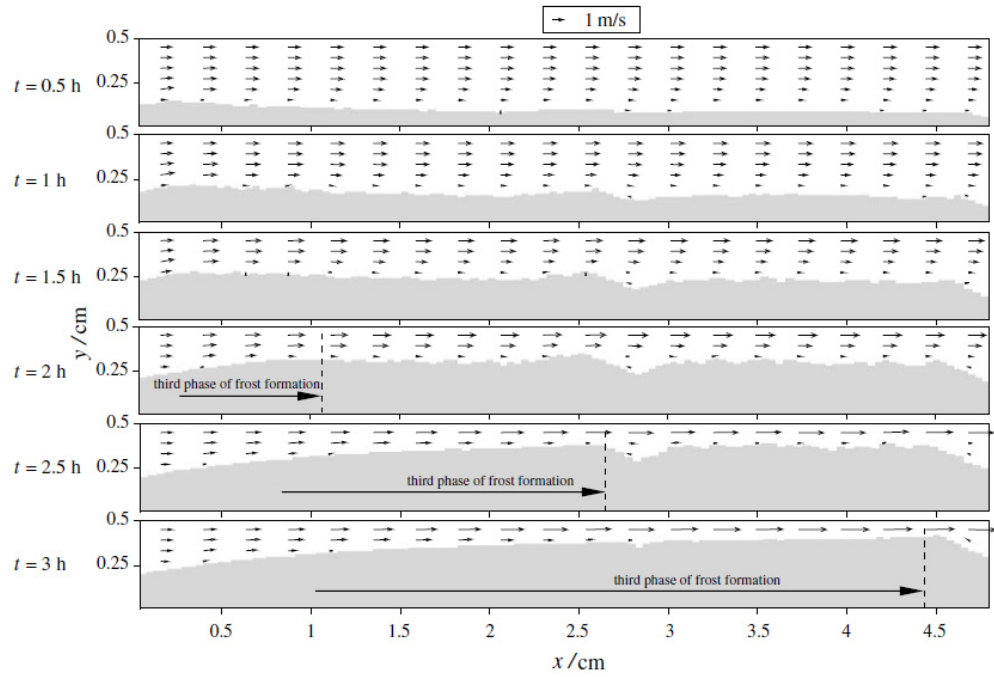


[19]). Por último, se encuentra un método muy poco estudiado aplicado a la escarcha que consiste en utilizar redes neuronales (Tahavvor 2011 [11]).

### 1.3.3. Flujo de aire con crecimiento de escarcha

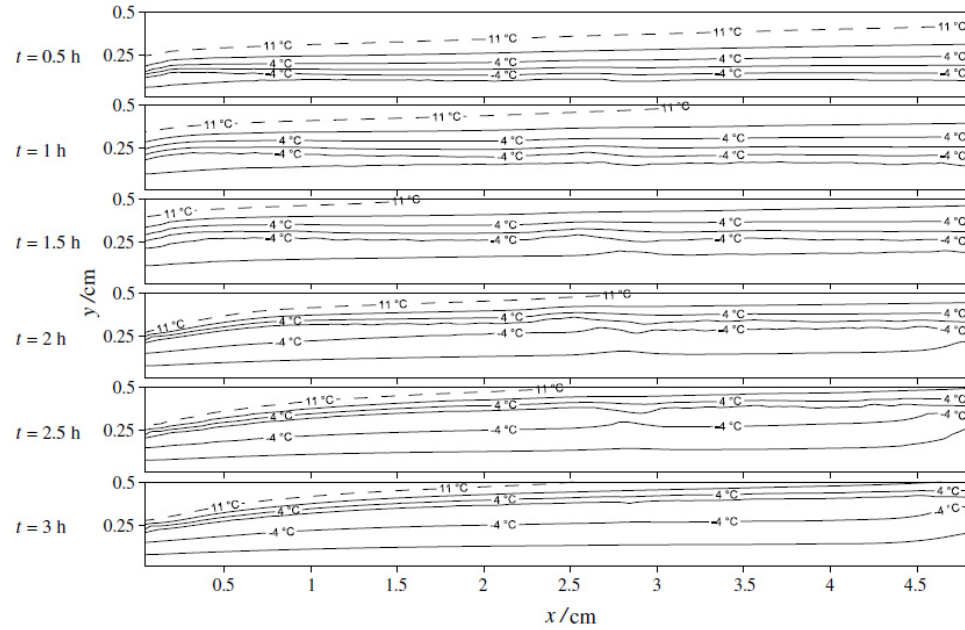
La mayoría de los estudios sobre flujo alrededor de un cilindro con cubierta porosa dejan de lado el crecimiento de la escarcha, mientras que la mayoría de los estudios sobre crecimiento de escarcha no incluyen el modelado del flujo fuera del medio poroso. Son pocos los estudios que acoplan ambos fenómenos y los que lo hacen utilizan coordenadas rectangulares. Uno de los artículos más relevantes en el tema es el publicado por Lenic en 2009 [24] donde modela el flujo de aire en el espacio entre dos aletas planas de un intercambiador de calor mediante ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento, energía y materia para el aire, mientras que para la escarcha solamente maneja ecuaciones de conservación de energía y materia. Se utiliza una correlación para calcular la densidad de la escarcha en función de su porosidad y a su vez se calcula la conductividad térmica de la escarcha en función de la densidad calculada. Se estudiaron diferentes condiciones de trabajo variando la velocidad del aire, temperatura del aire, contenido de humedad en el aire y temperatura de la superficie. Como parte de los resultados se presenta la distribución de temperaturas y el espesor de la escarcha en función del tiempo comparando los resultados numéricos con los experimentales. También se presentan contornos del crecimiento de la escarcha a lo largo de la aleta a diferentes tiempos, así como los vectores de velocidad del aire (Figura 1.1). Por último, presenta isothermas en el dominio en las cuales se observan las diferencias de temperatura entre la escarcha y el aire (Figura 1.2). En general los resultados predicen de manera coherente el fenómeno estudiado.

Uno de los artículos más relevantes en el tema es el publicado por Cui en 2011 [19]. En este trabajo se propone un nuevo modelo dependiente del tiempo y el espacio para predecir el crecimiento de escarcha en placas planas. El modelo se basa en un término llamado



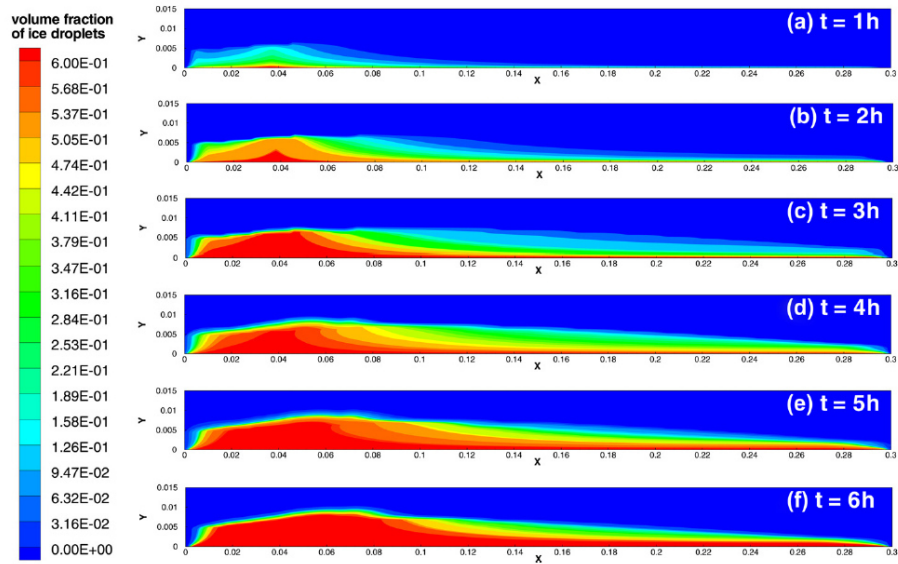
**Figura 1.1:** Resultados del crecimiento de escarcha y distribución de velocidad reportados por Lenic

*fracción volumen de sólido* el cual varía entre 0 y 1, siendo 1 únicamente fase sólida y 0 solamente fase gaseosa. Se plantea una ecuación de variación de la fracción volumen para el sólido, mientras que para la fase gaseosa se calcula el complemento a la unidad. De la misma manera, se utilizan ecuaciones de continuidad, conservación de cantidad de movimiento y energía para ambas fases y ecuación de conservación de humedad en la fase gaseosa. Todas estas ecuaciones están acopladas entre sí mediante los términos fuente o sumidero según sea el caso; la masa que se deposita para formar escarcha nueva se considera como sumidero para la ecuación de continuidad de la fase gaseosa y la ecuación de conservación de humedad, mientras que para la ecuación de continuidad de sólido se considera como fuente. Además estos términos fuente también afectan las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento y energía. La masa de humedad que se deposita es calculada mediante un modelo de nucleación.

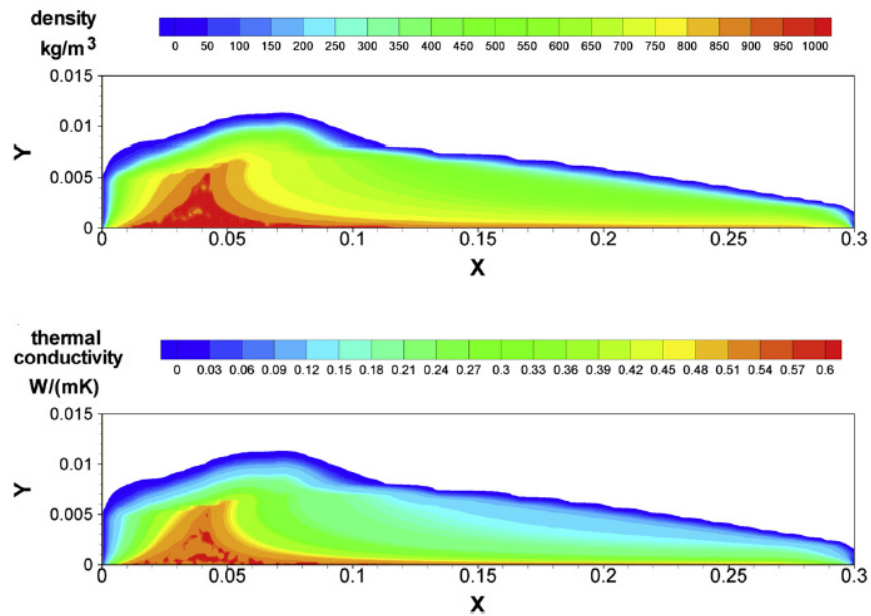


**Figura 1.2:** Isotermas en el dominio de la escarcha y del aire reportados por Lenic

Al resolver el sistema de ecuaciones propuesto en un dominio discreto se obtienen fracciones de volumen de sólido locales. Al principio, la masa de humedad que sufre el cambio de fase de gas a sólido causa que la fracción de volumen de sólido comience a crecer. Los nodos que presentan una fracción de sólido mayor o igual a cierto valor crítico son considerados formalmente como escarcha mientras que por de bajo de dicho valor se consideran todavía como fluido con partículas sólidas dispersas. El hecho de tener una fracción de volumen de sólido local permite observar tanto el crecimiento como la densificación de la escarcha a lo largo de todo el dominio. Dentro de los resultados reportados por Cui se encuentran contornos de fracción de volumen de sólido (Figura 1.3), donde se observa claramente el crecimiento y la porosidad de la escarcha. También se muestran contornos de la variación de la densidad y conductividad térmica dentro de la escarcha (Figura 1.4).



**Figura 1.3:** Resultados del crecimiento de escarcha y distribución de fracción volumen de sólido reportado por Cui en 2011



**Figura 1.4:** Variación de las propiedades de la escarcha reportados por Cui en 2011

## 1.4. Hipótesis

Mediante la solución de las ecuaciones de conservación, integrando modelos que relacionan la variación de las propiedades de un medio poroso en función de la propia porosidad, es factible predecir la disminución en la transferencia de calor en las superficies sobre las que crece la escarcha, así como el crecimiento de ésta, incluyendo sus cambios en las propiedades, e.g. densidad y conductividad térmica ).

## 1.5. Objetivos

### 1.5.1. Objetivo general

Evaluar en forma dinámica la transferencia de calor debida a los fenómenos de transporte que suceden simultáneamente, el flujo del fluido y la transferencia de masa, así como a la variación de las propiedades termofísicas y de transporte dentro del medio poroso que forma la escarcha. Para esto es necesario desarrollar un código numérico que, mediante el método de los volúmenes finitos, resuelva las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento, energía y materia, así como la formación, crecimiento y densificación de escarcha sobre diferentes superficies con flujo cruzado de aire.

### 1.5.2. Objetivos específicos

1. Identificar las ecuaciones de gobierno que describen el fenómeno de la formación de escarcha considerando:
  - Flujo convectivo en medio fluido y medio poroso
  - Modelo de formación y crecimiento de escarcha

- Correlación de las propiedades de la escarcha en función de la porosidad de esta.
2. Discretizar dichas ecuaciones en un esquema de volúmenes finitos
  3. Desarrollar un código en Fortran para resolver numéricamente las ecuaciones discretizadas mediante un algoritmo SIMPLE y el método TDMA.
  4. Obtener resultados numéricos y comparar con datos experimentales o códigos numéricos validados.

## CAPÍTULO

### 2

# ECUACIONES DE GOBIERNO

Para el estudio de cualquier fenómeno físico es necesario identificar adecuadamente su sistema de ecuaciones de gobierno. Las más comunes relacionadas con la dinámica de fluidos son la ecuación de conservación de masa (también conocida como *Ecuación de continuidad*), las ecuaciones de transporte de cantidad de movimiento y la ecuación de conservación de energía. En nuestro caso, además de las ya mencionadas, ocupamos ecuaciones de conservación de especies para los componentes de la fase gaseosa y de conservación de fracción de volumen para ambas fases, sólido y gas.

## 2.1. Balance general

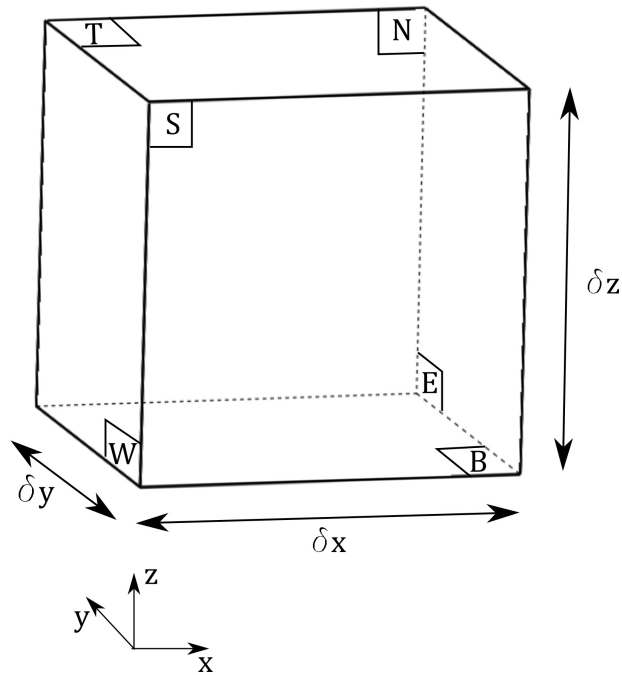
Para llevar a cabo la deducción de las ya mencionadas ecuaciones de gobierno se toma en cuenta un elemento diferencial muy pequeño de dimensiones  $\delta x \times \delta y \times \delta z$  sobre el cuál se realizan balances de la propiedad a estudiar, i.e. masa, velocidad, energía, etc. Las seis caras del elemento son nombradas  $N$ ,  $S$ ,  $E$ ,  $W$ ,  $T$  y  $B$ , respectivamente de acuerdo a las palabras en inglés *North*, *South*, *East*, *West*, *Top* y *Bottom* que se refieren a las cuatro direcciones cardinales y a las caras superior e inferior, como se muestra en la Figura 2.1. Suponemos que el centro del elemento está localizado en el origen de los ejes coordenados. Si pudiéramos medir matemáticamente todos los cambios de masa, cantidad de movimiento y energía en el elemento, debidos a flujos entrantes y salientes a través de sus fronteras, además de la generación o consumo interno en el elemento, darían lugar a las ecuaciones de conservación para el fluido.

Suponemos que cualquier propiedad del fluido es función del espacio y del tiempo, de manera que debemos escribir  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ ,  $p = p(x, y, z, t)$ ,  $T = T(x, y, z, t)$  y  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$  para la densidad, presión, temperatura y vector de velocidades, respectivamente. Sin embargo, para no hacer la nomenclatura tan larga, para cierta posición  $(x, y, z)$  y tiempo  $t$  dados, la densidad se denotará simplemente por  $\rho$ . De igual manera esta práctica se aplicará para todas las propiedades del fluido.

El elemento de estudio es tan pequeño que las propiedades en las caras del elemento pueden ser aproximadas por los primeros dos términos de la expansión en series de Taylor. De manera que, por ejemplo, la presión en las caras  $W$  y  $E$ , las cuales se encuentran a una distancia  $\frac{1}{2}\delta x$  del centro del elemento, puede ser expresada por

$$p_W = p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \quad \text{y} \quad p_E = p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \quad (2.1)$$





**Figura 2.1:** Elemento de fluido para las ecuaciones de conservación

## 2.2. Conservación de masa

Lo primero que hay que hacer para la deducción de la ecuación de conservación de masa es escribir un balance de masa en el elemento de control.

Tasa de incremento de masa en un elemento de fluido	=	Tasa de flujo neto de masa hacia el elemento de fluido
---	---	--

La tasa de incremento de masa dentro del elemento de fluido es

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (2.2)$$

Por otro lado, el flujo másico está dado por el producto de la densidad, el área y la velocidad normal a la cara. Por lo que tomando en cuenta los flujos a través de todas las caras tenemos que la tasa de flujo neto de masa es

$$\begin{aligned} & \left( \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z - \left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z \\ & + \left( \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z - \left( \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z \\ & + \left( \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y - \left( \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y \quad (2.3) \end{aligned}$$

donde los flujos que entran al elemento poseen signo positivo, mientras que los flujos que abandonan el elemento tienen signo negativo.

Ahora la tasa de incremento de masa (Ecuación 2.2) se iguala a la tasa neta de flujo másico (Ecuación 2.3). Todos los términos se reacomodan del lado izquierdo de la igualdad y se divide por el volumen del elemento  $\delta x \delta y \delta z$  para obtener

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

o en forma vectorial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.5)$$

En la Ecuación (2.5) el primer término representa los cambios de densidad con respecto al tiempo, mientras que el segundo término describe el flujo másico neto a través de las fronteras del elemento. Esta ecuación es conocida como la ecuación de conservación de masa o ecuación de continuidad en tres dimensiones para un fluido compresible. En el caso de un fluido incompresible la densidad es constante y la ecuación de continuidad sería simplemente

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.6)$$

Las leyes de conservación de cantidad de movimiento y de energía se basan en los cambios de un elemento de fluido. En un enfoque *Langrangiano* la partícula de fluido estudiada se mueve junto con el flujo, de tal manera que la derivada total, *material* o *sustancial* de cierta propiedad  $\phi$  es denotada por  $D\phi/Dt$  y está dada por

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad (2.7)$$

Debido a que el elemento se mueve con el flujo tenemos que  $\partial x/\partial t = u$ ,  $\partial y/\partial t = v$  y  $\partial z/\partial t = w$ . Por lo tanto la derivada total de  $\phi$  es

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u \frac{\partial\phi}{\partial x} + v \frac{\partial\phi}{\partial y} + w \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi \quad (2.8)$$

$D\phi/Dt$  define el cambio instantáneo de  $\phi$  por unidad de masa mientras se desplaza con velocidad  $\mathbf{u}$ . Es de interés desarrollar métodos que resuelvan el movimiento de fluidos basados en un enfoque *Langrangiano*, siguiendo el movimiento y calculando las tasas de cambio de la propiedad  $\phi$  de un cúmulo de partículas. Sin embargo, es de mayor interés desarrollar ecuaciones para una colección de elementos de fluido de manera que se tenga una región fija en el espacio, este es conocido como el enfoque *Euleriano*.

Así como lo hicimos con la ecuación de conservación de masa, nosotros estamos interesados en desarrollar ecuaciones para tasas de cambio volumétricas de las propiedades. El cambio volumétrico total de  $\phi$  estará dado por el producto de  $D\phi/Dt$  y la densidad, por lo tanto

$$\rho \frac{D\phi}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi \right) \quad (2.9)$$

Las aplicaciones más comunes de las leyes de conservación requieren del análisis de los cambios de las propiedades del flujo en un elemento de fluido que se encuentra estático en el espacio. La relación entre la derivada material que sigue a un elemento de fluido, con la tasa de cambio de una propiedad en un elemento de fluido se desarrolla a continuación.

La ecuación de conservación de masa establece la conservación de la masa por unidad de volumen (densidad  $\rho$ ). La suma de la tasa de cambio de la densidad con el tiempo más el término convectivo en la ecuación de conservación de masa para un elemento de fluido es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (2.10)$$

Podemos generalizar para cualquier propiedad intensiva a conservar de la siguiente manera

$$\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) \quad (2.11)$$

La Ecuación (2.11) representa el cambio con respecto al tiempo de  $\phi$  por unidad de volumen más el flujo neto de  $\phi$  por unidad del volumen a través de las fronteras del elemento de fluido. Si desarrollamos las derivadas en la ecuación anterior tendremos

$$\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) = \rho \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \right] + \phi \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] \quad (2.12)$$

donde los términos entre corchetes del segundo término del lado derecho de la igualdad deben ser igual a cero de acuerdo con la ecuación de continuidad (Ecuación 2.5), por lo tanto,

$$\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) = \rho \frac{D\phi}{Dt} \quad (2.13)$$

Para hacerlo más claro, en palabras, la Ecuación (2.13) nos dice que

Tasa de incremento de $\phi$ en un elemento de fluido	+	Tasa de flujo neto de $\phi$ hacia el elemento de fluido	=	Tasa de incremento de $\phi$ para el elemento de fluido
---	---	--	---	---

Esta relación se utiliza para construir las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento en las tres dimensiones y de energía

## 2.3. Conservación de cantidad de movimiento

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento está basada en la *Segunda Ley de Newton* que nos dice que la tasa de cambio de la cantidad de movimiento en un elemento de fluido es debida a la suma de todas las fuerzas que actúan sobre dicho elemento:

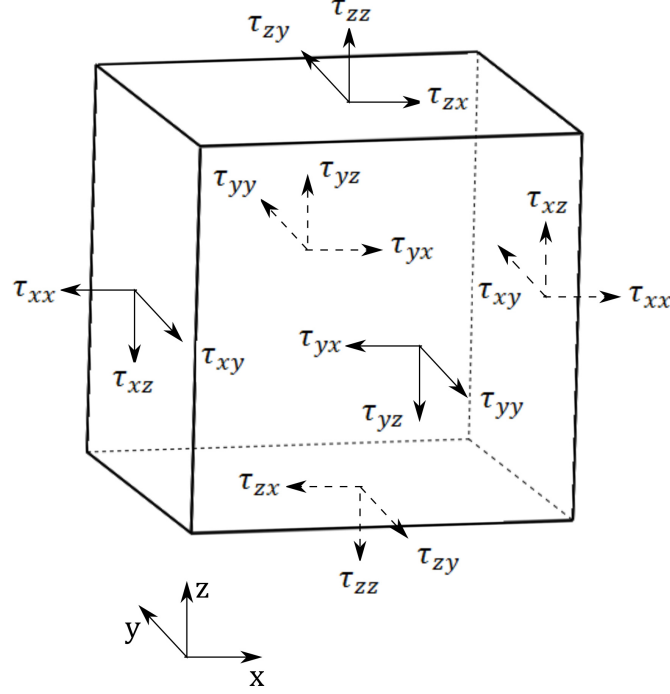
Tasa de incremento de cantidad de movimiento en un elemento de fluido	=	Suma de todas las fuerzas actuando en el elemento de fluido
---	---	---

La tasa de incremento de cantidad de movimiento en un elemento de fluido para cada una de las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  están dadas por

$$\rho \frac{Du}{Dt} \quad \rho \frac{Dv}{Dt} \quad \rho \frac{Dw}{Dt} \quad (2.14)$$

Por otro lado están las fuerzas que actúan sobre una partícula de fluido, que se pueden dividir en dos tipos, esfuerzos de superficie y esfuerzos de cuerpo. Los esfuerzos de superficie son aquellos que se aplican a la superficie de la partícula, ya sean normales (presión) o tangenciales (esfuerzos viscosos), mostrados en la Figura 2.2. Además, las fuerzas de cuerpo son aquellas que actúan externamente sobre el volumen de la partícula, como la fuerza de gravedad, fuerzas electromagnéticas, etc. Estas fuerzas de cuerpo usualmente se consideran separadas a las fuerzas de superficie y se incluyen en un término fuente  $S_u$ .

La notación subindicial  $\tau_{ij}$  adoptada para los esfuerzos viscosos indica la dirección en que se efectúan dichos esfuerzos. La componente  $j$  indica que se está efectuando un esfuerzo en dicha dirección con respecto a un plano normal a la componente  $i$ .



**Figura 2.2:** Componentes de los esfuerzos viscosos en las caras de un elemento de fluido

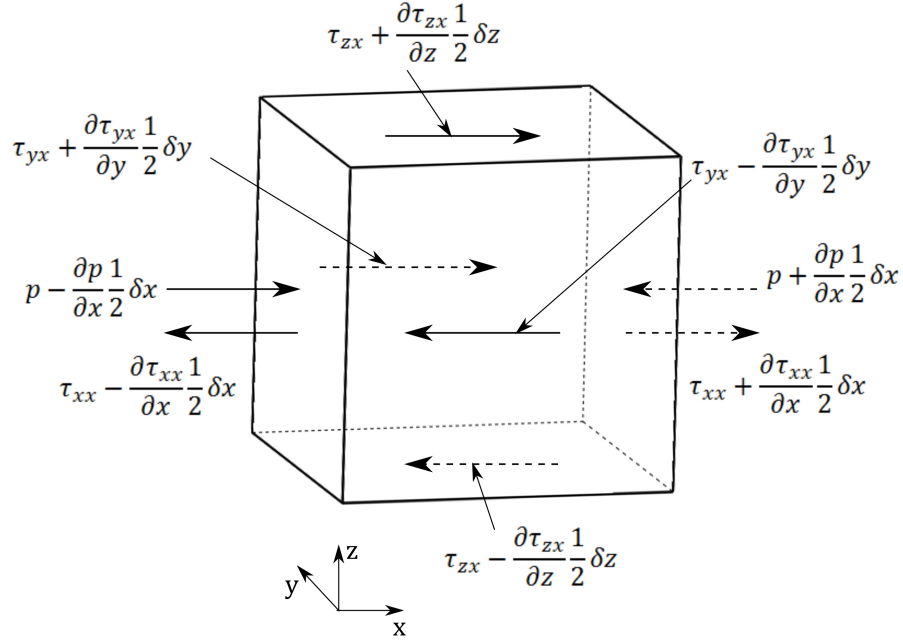
Para el desarrollo de la ecuación de cantidad de movimiento tomaremos en cuenta primeramente los esfuerzos efectuados en la dirección  $x$  mostrados en la Figura 2.3

La magnitud de la fuerza debida a los esfuerzos es igual al producto de dichos esfuerzos por el área sobre la cual actúan, de manera que para las caras  $E$  y  $W$  tendremos que la fuerza neta actuando en la dirección  $x$  es

$$\left[ \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left( \tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z + \left[ - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left( \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z = \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (2.15)$$

Para las caras  $N$  y  $S$ , la fuerza neta actuando en la dirección  $x$  es

$$- \left( \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (2.16)$$



**Figura 2.3:** Componentes de los esfuerzos en la dirección  $x$

Por último, la fuerza neta que actúa en la dirección  $x$  en las caras  $T$  y  $B$  es

$$-\left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z\right) \delta x \delta y + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z\right) \delta x \delta y = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (2.17)$$

La fuerza total que actúa sobre el elemento de fluido en la dirección  $x$  es igual a la suma de las Ecuaciones (2.15) a (2.17) y divididas por el volumen  $\delta x \delta y \delta z$

$$\frac{\partial (-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (2.18)$$

Finalmente, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento para la componente en  $x$  resulta de igualar la tasa de cambio de cantidad de movimiento en  $x$  para un elemento con la fuerza neta aplicada sobre dicho elemento como se muestra en la siguiente ecuación

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + S_u \quad (2.19)$$

De igual manera, si aplicamos el mismo desarrollo para los esfuerzos en la dirección  $y$ , tendremos que la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en dicha dirección es:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(-p + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + S_v \quad (2.20)$$

y asimismo para la dirección  $z$ :

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial(-p + \tau_{zz})}{\partial z} + S_w \quad (2.21)$$

En estas ecuaciones, el término fuente contiene todas las contribuciones por fuerzas de cuerpo, de manera que si quisiéramos modelar el efecto de la gravedad debemos definir  $S_u = 0$ ,  $S_v = 0$  y  $S_w = -\rho g$ .

Para llegar a la forma definitiva de las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento necesitamos encontrar un modelo adecuado para representar los esfuerzos viscosos  $\tau_{ij}$ . Generalmente estos esfuerzos se expresan en función de la tasa de deformación local, que se compone de la tasa de deformación lineal y la tasa de deformación volumétrica.

La tasa de deformación lineal de un elemento de fluido tiene nueve términos en las tres componentes, de los cuales seis son independientes. Estas tasas de deformación se denotan por  $s_{ij}$ . Existen tres componentes de elongación lineal:

$$s_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad s_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad s_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.22)$$

Existen además seis componentes de deformación lineal por cizalla:

$$s_{xy} = s_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad s_{xz} = s_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad s_{yz} = s_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.23)$$



### 2.3. CANTIDAD DE MOVIMIENTO CAPÍTULO 2. ECUACIONES DE GOBIERNO

Por último la deformación volumétrica está dada por

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.24)$$

Para un fluido Newtoniano, los esfuerzos viscosos están relacionados con las tasas de deformación mediante dos constantes de proporcionalidad: la primera viscosidad (viscosidad dinámica  $\mu$ ) y la segunda viscosidad,  $\lambda$ , para relacionar los esfuerzos viscosos con la tasa de deformación volumétrica. Las nueve componentes de los esfuerzos viscosos son entonces:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.25)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.26)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.25) y (2.26) en (2.19), (2.20) y (2.21) surgen como resultado las llamadas ecuaciones de *Navier-Stokes*:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + S_u \quad (2.27)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + S_v \quad (2.28)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + S_w \quad (2.29)$$

Regularmente se suelen acomodar los términos de los esfuerzos viscosos como

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \\
&= \nabla \cdot (\mu \nabla u) + [s_x] \quad (2.30)
\end{aligned}$$

donde todos los términos dentro de los corchetes en el lado derecho de la igualdad se concentran en un nuevo término fuente  $[s_x]$  y a su vez podemos juntar los dos términos en uno solo  $S_u = S_u + [s_u]$  para finalmente obtener la forma definitiva de las Ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot (\mu \nabla u) + S_u \quad (2.31)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla \cdot (\mu \nabla v) + S_v \quad (2.32)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla \cdot (\mu \nabla w) + S_w \quad (2.33)$$

## 2.4. Conservación de energía

La ecuación de conservación de la energía se deriva de la primera ley de la termodinámica, la cual dicta que la tasa de cambio en la energía de un elemento de fluido es igual a la tasa de calor añadido a dicha partícula más la tasa de trabajo ejercido sobre el elemento de fluido:

Para construir la ecuación de conservación de energía necesitamos definir la tasa de incremento de energía por unidad de volumen que está dada por

$$\rho \frac{DE}{Dt} \quad (2.34)$$

Tasa de incremento de energía en un elemento de fluido	=	Tasa neta de calor añadido a un elemento de fluido	+	Tasa neta de trabajo ejercido sobre un elemento de fluido
--	---	--	---	---

**Trabajo ejercido por fuerzas de superficie** La tasa de trabajo ejercido sobre un elemento de fluido por fuerzas superficiales está dada por el producto entre dicha fuerza y la componente de la velocidad en la dirección de la aplicación de la fuerza. Por ejemplo, el trabajo efectuado por las fuerzas (2.15) a (2.17) está dado por

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( pu - \frac{\partial(pu)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left( pu + \frac{\partial(pu)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z \\
& + \left[ - \left( \tau_{xx} u - \frac{\partial(\tau_{xx} u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left( \tau_{xx} u + \frac{\partial(\tau_{xx} u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z \\
& + \left[ - \left( \tau_{yx} u - \frac{\partial(\tau_{yx} u)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) + \left( \tau_{yx} u + \frac{\partial(\tau_{yx} u)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \right] \delta x \delta z \\
& + \left[ - \left( \tau_{zx} u - \frac{\partial(\tau_{zx} u)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) + \left( \tau_{zx} u + \frac{\partial(\tau_{zx} u)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \right] \delta x \delta y \quad (2.35)
\end{aligned}$$

La tasa neta de trabajo efectuado sobre un elemento de fluido en la dirección  $x$  es entonces

$$\left[ \frac{\partial(u(-p + \tau_{xx}))}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (2.36)$$

Aplicando la misma metodología a las fuerzas que actúan en las direcciones  $y$  y  $z$ , podemos calcular el trabajo efectuado en dichas direcciones:

$$\left[ \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v(-p + \tau_{yy}))}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (2.37)$$

y

$$\left[ \frac{\partial (w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial (w(-p + \tau_{zz}))}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (2.38)$$

La tasa total de trabajo ejercido por unidad de volumen en un elemento de fluido por todas las fuerzas superficiales está dado por la suma de las ecuaciones (2.36) a (2.38) divididas por el volumen  $\delta x \delta y \delta z$ . Podemos juntar todos los términos que incluyen la presión en forma vectorial

$$-\frac{\partial (up)}{\partial x} - \frac{\partial (vp)}{\partial y} - \frac{\partial (wp)}{\partial z} = -\nabla \cdot (p\mathbf{u}) \quad (2.39)$$

Dando así lugar a la tasa total de trabajo aplicado en un elemento de fluido por fuerzas superficiales:

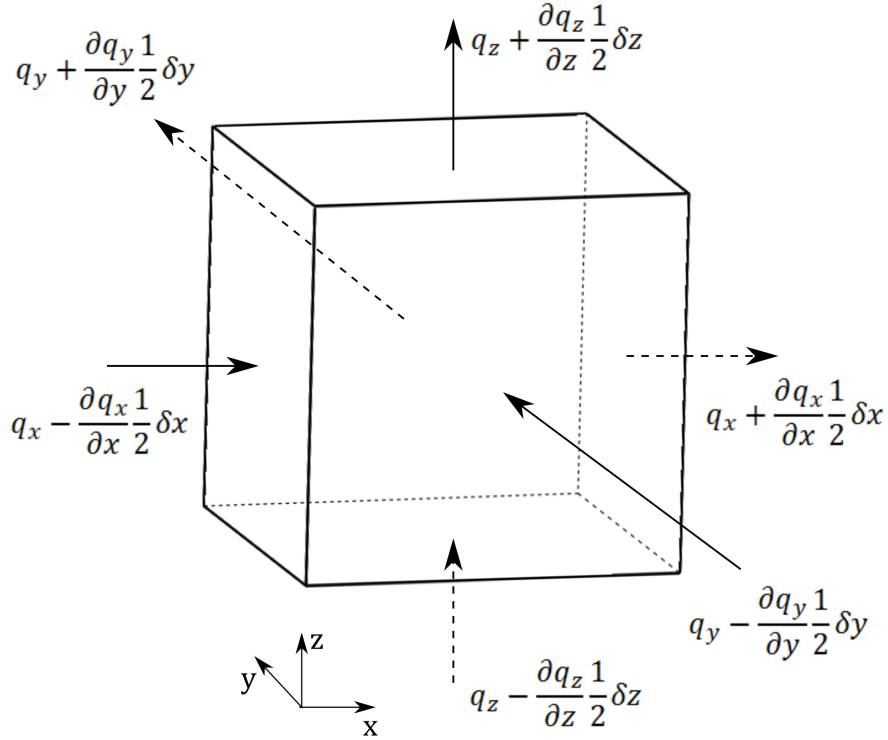
$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (p\mathbf{u}) + \frac{\partial (u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v\tau_{yy})}{\partial y} \\ + \frac{\partial (v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial (w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial (w\tau_{zz})}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.40)$$

**Flujo de energía por conducción de calor** El flujo de calor  $\mathbf{q}$  es un vector con tres componentes,  $q_x$ ,  $q_y$  y  $q_z$  cuyos flujos a través de las fronteras se ilustran en la Figura 2.4

La tasa neta de transferencia de calor al elemento de fluido debido al flujo de calor en la dirección  $x$  está dada por la diferencia entre la entrada de calor por la cara  $W$  y la salida de calor por la cara  $E$ :

$$\left[ \left( q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (2.41)$$

De igual manera, para las direcciones  $y$  y  $z$ , la tasa neta de transferencia de calor al fluido es



**Figura 2.4:** Componentes del vector de flujo de calor.

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (2.42)$$

$$-\frac{\partial q_z}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (2.43)$$

La tasa total de transferencia de calor al fluido debida al flujo de calor a través de las fronteras resulta de la suma de las ecuaciones (2.41) a (2.43) y divididas por el volumen  $\delta x \delta y \delta z$

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} = -\nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.44)$$

De acuerdo a la ley de Fourier, el flujo de calor se relaciona con el gradiente de temperatura local como

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.45)$$

o en forma vectorial

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (2.46)$$

Combinando las ecuaciones (2.44) y (2.46) obtendremos finalmente la ecuación que representa la tasa de calor añadido a una partícula de fluido por conducción a través de las fronteras:

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (2.47)$$

**Ecuación de energía** Por último, debemos especificar la energía  $E$  de un fluido. Regularmente la energía del fluido está compuesta por la energía interna, la energía cinética y la energía potencial. En este caso tomaremos la energía potencial debida a la gravedad como un término fuente y nos quedaremos con la energía interna y la energía cinética de manera que

$$E = i + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \quad (2.48)$$

La ecuación de conservación de energía se construye igualando la tasa neta de incremento de energía (Ecuación 2.34) con la tasa neta de trabajo ejercido sobre un elemento de fluido (Ecuación 2.40) y la tasa neta de calor añadido a dicho elemento (Ecuación 2.47) para dar lugar a

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\left(i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right)}{Dt} = & -\nabla \cdot (p\mathbf{u}) + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} \\ & + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} + \nabla \cdot (k\nabla T) + S_E \end{aligned} \quad (2.49)$$

Es común eliminar el efecto de la energía potencial restando una ecuación de conservación de energía potencial, obtenida de multiplicar las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento en la dirección  $x$  (Ecuación 2.19) por la componente  $u$  de la velocidad, la de cantidad de movimiento en  $y$  (Ecuación 2.20) por la componente  $v$  y la de cantidad de movimiento en la dirección  $z$  (Ecuación 2.21) por la componente  $w$  de la velocidad para obtener

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\left(\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right)}{Dt} = & -\mathbf{u} \cdot \nabla p + u\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right) \\ & + v\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right) + w\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_M \end{aligned} \quad (2.50)$$

donde  $\mathbf{S}_M = S_u + S_v + S_w$ . Restando las Ecuaciones (2.49) y (2.50), y definiendo una nueva fuente como  $S_i = S_E - \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_M$  obtenemos la ecuación de conservación de energía interna:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Di}{Dt} = & -p\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (k\nabla T) + \tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z} \\ & + \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz}\frac{\partial w}{\partial z} + S_i \end{aligned} \quad (2.51)$$

Si consideramos que estudiamos un flujo incompresible entonces  $i = cT$  donde  $c$  es el calor específico, y además  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , por lo que la Ecuación (2.51) se convierte en una ecuación de temperatura

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + S_i \quad (2.52)$$

Por último si utilizamos el modelo para fluidos Newtonianos de los esfuerzos viscosos  $\tau_{ij}$ , tendremos

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi + S_i \quad (2.53)$$

donde

$$\Phi = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \quad (2.54)$$

## 2.5. Conservación de especies

La ecuación de conservación de especies se deriva de la ley de conservación de masa, aplicada a mezclas de varios componentes. Escribiendo un balance de materia en el elemento de control tendremos

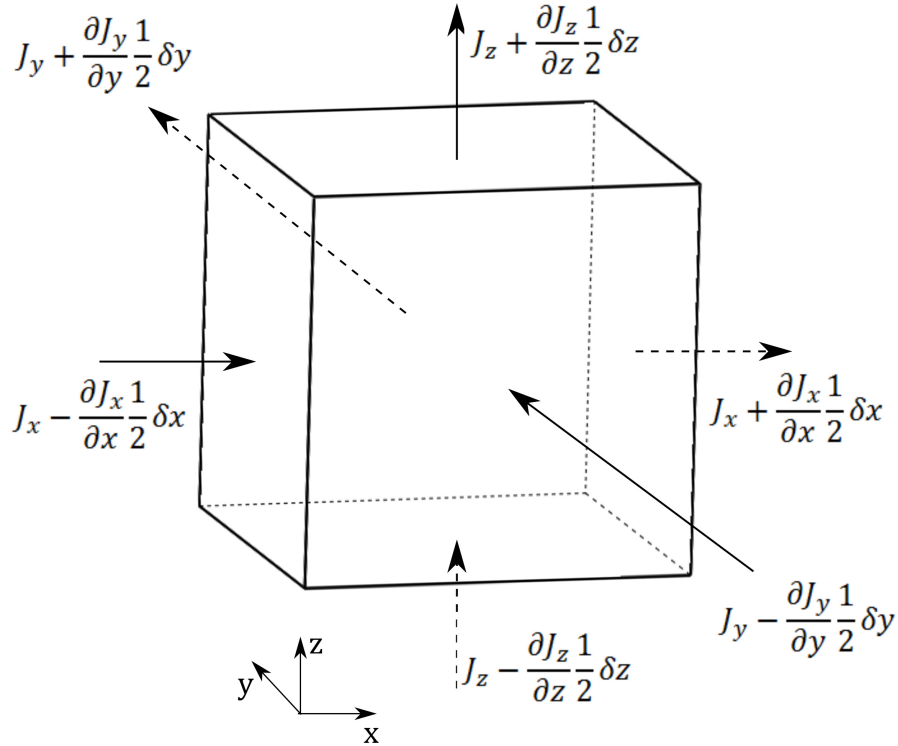
Tasa de incremento de masa de la especie $i$ en un elemento de fluido	=	Tasa de flujo neto de masa de la especie $i$ hacia el elemento de fluido	+	Tasa de incremento o decremento de masa de la especie $i$ debido a fuentes
---	---	--	---	--

En este caso la propiedad a conservar es la fracción másica de la especie  $i$ , de notada por  $Y_i$ . Como lo hemos venido desarrollando, la tasa de incremento de masa en un elemento de fluido por unidad de volumen es equivalente al producto de la densidad por la derivada material:



$$\rho \frac{DY_i}{Dt} \quad (2.55)$$

Para determinar la tasa de flujo neto de masa a través de las fronteras del elemento necesitamos cuantificar el flujo másico  $\mathbf{J}$  que atraviesa dichas fronteras, cuyos componentes son mostrados en la Figura 2.5



**Figura 2.5:** Flujo másico que atraviesa todas las fronteras del elemento de fluido.

La tasa neta de incremento de masa debido a los flujos másicos en la dirección  $x$  está dada por

$$\left[ \left( J_x - \frac{\partial J_x}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) - \left( J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \right] \delta y \delta z = -\frac{\partial J_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (2.56)$$

De igual manera para la dirección  $y$ :

$$- \frac{\partial J_y}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (2.57)$$

Y en la dirección  $z$ :

$$- \frac{\partial J_z}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (2.58)$$

La tasa total de incremento de masa debido al flujo másico a través de las paredes resulta de sumar las Ecuaciones (2.56) a (2.58) y dividiendo sobre el volumen de control  $\delta x \delta y \delta z$  para obtener:

$$- \frac{\partial J_x}{\partial x} - \frac{\partial J_y}{\partial y} - \frac{\partial J_z}{\partial z} = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad (2.59)$$

De acuerdo con la primera Ley de Fick, el flujo de masa está relacionado con los gradientes de fracción másica de  $i$  de la siguiente manera:

$$J_x = -\rho D_{ij} \frac{\partial Y_i}{\partial x} \quad J_y = -\rho D_{ij} \frac{\partial Y_i}{\partial y} \quad J_z = -\rho D_{ij} \frac{\partial Y_i}{\partial z} \quad (2.60)$$

o en forma vectorial

$$\mathbf{J} = -\rho D_{ij} \nabla Y_i \quad (2.61)$$

donde  $D_{ij}$  representa la difusividad másica de la especie  $i$  en la especie  $j$  y tiene unidades de  $m^2/s$ .

Combinando las ecuaciones (2.59) y (2.61) tendremos que la tasa neta de flujo de masa a través de las paredes del elemento es

$$- \frac{\partial J_x}{\partial x} - \frac{\partial J_y}{\partial y} - \frac{\partial J_z}{\partial z} = \nabla \cdot (\rho D_{ij} \nabla Y_i) \quad (2.62)$$

Finalmente la ecuación de conservación de especies se construye igualando la tasa neta de incremento de masa de la especie  $i$  en un elemento de fluido a la tasa de flujo neto de masa de la especie  $i$  hacia el elemento de fluido más las fuentes de masa de la especie  $i$ :

$$\rho \frac{DY_i}{Dt} = \nabla \cdot (\rho D_{ij} \nabla Y_i) + S_Y \quad (2.63)$$

En teoría deberían existir  $n - 1$  ecuaciones de conservación para  $n$  especies ya que la última se calcula simplemente como el complemento a la unidad de la suma de las demás, de manera que

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 1 \quad (2.64)$$

## 2.6. Fracción de volumen

Para darle seguimiento a la interfaz entre dos fases (e.g. gaseosa y sólida) es necesario resolver la ecuación de continuidad para la fracción de volumen,  $\alpha_q$ , de cada una de las fases. Para cierta fase  $q$  dicha ecuación tiene la forma:

$$\frac{1}{\rho_q} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_q \rho_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \mathbf{u}_q) \right] = S_{\alpha_q} + \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) \quad (2.65)$$

donde  $\dot{m}_{qp}$  es la masa que se transfiere de la fase  $q$  a la fase  $p$  y  $\dot{m}_{pq}$  es la masa que pasa de la fase  $p$  a la fase  $q$ . Si consideramos únicamente dos fases, y además suponemos que solamente hay transferencia de masa de la fase gaseosa a la fase sólida debida al proceso de deposición, podemos definir un nuevo término fuente como

$$S_{\alpha_q} = S_{\alpha_q} + \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) \quad (2.66)$$

y es igual a la masa que pasa de la fase gaseosa a la fase sólida, cuyo cálculo es describe en la Sección 2.7.

Introduciendo el nuevo término fuente y dividiendo todo por la densidad de la fase  $q$  tendremos la ecuación de conservación de la fase  $q$  como

$$\frac{\partial \alpha_q}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_q \mathbf{u}_q) = S_{\alpha_q} \quad (2.67)$$

donde

$$S_{\alpha_q} = \frac{\dot{m}_{pq}}{\rho_q} \quad (2.68)$$

Debido a que solamente se consideran dos fases, la fracción de volumen de la fase  $p$  se calcula en base a la restricción de que la suma de todas las fracciones debe ser igual a la unidad:

$$\sum_{q=1}^n \alpha_q = 1 \quad (2.69)$$

## 2.7. Modelo de nucleación

El fenómeno que describe la aparición de la capa de escarcha es conocido como nucleación homogénea y es descrito originalmente por McDonald [38, 39] y extendida por una corrección no isotérmica propuesta por Krantowitz [40]. Se hacen las siguientes simplificaciones para poder resolver el problema:

- La nucleación es completamente homogénea, por lo que se considera que no existen impurezas que pudieran acelerar la nucleación.
- El crecimiento de las partículas de hielo está basada en un radio crítico, por debajo del cual las partículas son inestables.
- Las partículas de hielo son esféricas.
- El calor específico de las partículas de hielo es despreciable en comparación con el calor latente de desublimación.

La tasa de nucleación por unidad de volumen por segundo de los cúmulos de hielo por encima del radio crítico,  $I$ , está dada por:

$$I = \frac{n_c}{1 - \theta} \left( \frac{\rho_g^2}{\rho_s} \right) \sqrt{\frac{2\sigma}{M_w^3 \pi}} \exp \left( -\frac{4\pi r^{*3} \sigma}{3K_b T_g} \right) \quad (2.70)$$

donde  $n_c$  es el coeficiente de nucleación y se toma regularmente como 1 de acuerdo con Gerber y Kermani [41], los subíndices  $g$  y  $s$  se refieren a las fases gaseosa y sólida, respectivamente.  $\sigma$  es la energía libre interfacial y es equivalente a  $33 \times 10^{-7} \text{ J/cm}^2$ , según Rogers [42].  $M_w$  es el peso molecular del agua,  $K_b$  es la constante de Boltzmann ( $K_b = 1.3807 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ ) y  $\theta$  es el factor de corrección no isotérmico definido por

$$\theta = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} \frac{\Delta h}{RT_g} \left( \frac{\Delta h}{RT_g} - 0.5 \right) \quad (2.71)$$

donde  $\gamma$  es la relación de calores específicos  $\gamma \approx 1.32$ ,  $\Delta h$  es la entalpía específica de desublimación y  $R$  es la constante de gas ideal para el vapor de agua equivalente a  $461.4 \text{ J/kgK}$

El radio crítico  $r^*$  a partir del cual las partículas de hielo formadas comienzan a ser estables está definido por

$$r^* = \frac{2\sigma}{\rho_s RT_g \ln(p_{va}/p_{sat})} \quad (2.72)$$

donde  $p_{va}$  es la presión del vapor de agua y  $p_{sat}$  es la presión de saturación a la temperatura del gas  $T_g$ .

La razón de crecimiento de nucleación puede ser deducida mediante un balance de energía en el cual se desprecian los efectos de conducción interna dentro de la partícula de hielo, para dar resultado a la siguiente expresión [41]:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\lambda_g (T_s - T_g)}{(h_g - h_s) \rho_s} \quad (2.73)$$

donde  $\lambda_g$  es el coeficiente de transferencia de calor convectivo y se calcula mediante la relación:

$$\lambda_g = \frac{Nu k_g}{2r} \quad (2.74)$$

donde  $Nu$  es el número de Nusselt y debe ser calculado con una relación adecuada para las condiciones de flujo, i.e. geometría esférica (partículas de hielo) en flujo externo, como la desarrollada por Ranz y Marshall [43] en función del número de Reynolds y el número de Prandtl:

$$Nu = 2 + 0.6Re^{1/2}Pr^{1/3} \quad (2.75)$$

donde

$$Re = \frac{\rho_g u_g 2r}{\mu_g} \quad \text{y} \quad Pr = \frac{c_g \mu_g}{k_g} \quad (2.76)$$

El número de partículas de hielo en cierto momento dado,  $\eta$  puede ser calculado por:

$$\eta = \sum_t I(t) \quad (2.77)$$

Con estos parámetros definidos, podemos ahora calcular cuál es la cantidad de masa que se está desublimando mediante una expresión que toma en cuenta tanto la formación de cristales nuevos como el crecimiento de los ya existentes:

$$\dot{m}_{va \rightarrow i} = \frac{4}{3}\pi\rho_s I r^{*3} + 4\pi\rho_s \eta \bar{r}^2 \frac{\partial r}{\partial t} \quad (2.78)$$

## 2.8. Términos fuente

Finalmente definiremos los términos fuente para las ecuaciones de gobierno que se habían dejado expresados como  $S$ . Estos términos fuente están en función de la masa de agua que pasa de la fase gaseosa a la fase sólida ( $\dot{m}_{va \leftarrow i}$ ).

Para la conservación de la cantidad de movimiento, el término fuente es

$$S_u = -\dot{m}_{va \leftarrow i} \mathbf{u} \quad (2.79)$$

Para la ecuación de conservación de la energía será:

$$S_i = -\dot{m}_{va \leftarrow i} h_{vap} \quad (2.80)$$

donde  $h_{vap}$  es la entalpía específica de desublimación.

Para la conservación de especies del vapor de agua, el término fuente es simplemente

$$S_Y = -\dot{m}_{va \leftarrow i} \quad (2.81)$$

Y finalmente, para la ecuación de fracción de volumen de sólido el término fuente será

$$S_{\alpha_s} = \frac{\dot{m}_{va \leftarrow i}}{\rho_s} \quad (2.82)$$

## CAPÍTULO

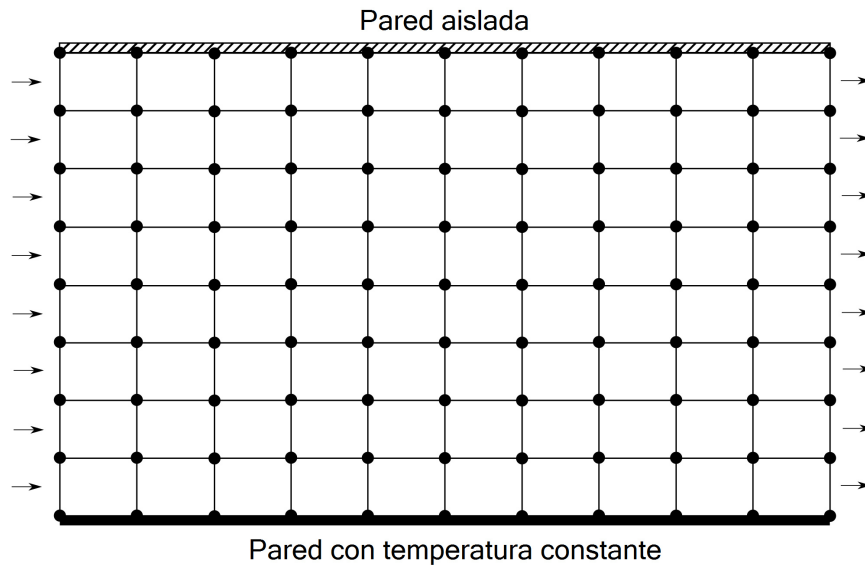
### 3

# MÉTODO NUMÉRICO

Como hemos visto en el capítulo anterior, las ecuaciones de gobierno que describen los fenómenos deseados, son ecuaciones diferenciales parciales, no lineales y acopladas entre sí, debido a que en la ecuación de fracción de volumen de sólido es necesario conocer las componentes de la velocidad  $u$  y  $v$ , mientras que el cálculo de dichas velocidades se ve influenciado por la fracción de volumen de gas (complemento de la fracción de volumen de sólido). Debido a la complejidad de dichas ecuaciones, es prácticamente imposible encontrar una solución analítica. Es por eso que se opta por aplicar un método numérico para obtener la solución aproximada. La idea del método numérico es que no necesitamos saber el valor de cierta propiedad, digamos temperatura, en todo el dominio, sino solamente en ciertos puntos de interés, de aquí surge la necesidad de convertir un dominio continuo



en uno discreto, es decir, dividir el dominio en forma de malla (Figura 3.1) y calcular la temperatura en los puntos de la misma. Después se construyen y resuelven ecuaciones algebraicas para las temperaturas desconocidas. De esta manera estamos resolviendo ecuaciones algebraicas en vez de ecuaciones diferenciales, haciendo la solución del problema mucho más fácil.



**Figura 3.1:** Representación de un dominio discreto o malla

Al proceso de transformar un dominio continuo gobernado por ecuaciones diferenciales en un dominio discreto representado por ecuaciones lineales se le conoce como discretización. Existen diversos métodos de discretización tales como la formulación en series de Taylor (que es la base para las diferencias finitas), el método de los residuales ponderados (Method of Weighted Residuals), entre otros. Sin embargo, el método más utilizado para aplicaciones de dinámica de fluidos computacional o *CFD* por sus siglas en inglés (Computational Fluid Dynamics) es el de los volúmenes finitos, esto debido a su naturaleza conservativa.

### 3.1. Método de los volúmenes finitos

El principio del método de los volúmenes finitos se basa en dividir el dominio en cierto número de volúmenes de control que no se superponen entre ellos, de manera que cada punto de la malla esté rodeado por un volumen de control. Para obtener las ecuaciones discretizadas se procede a integrar las ecuaciones diferenciales sobre dichos volúmenes de control y se utilizan perfiles de variación adecuados para aproximar las propiedades en las caras de los volúmenes. De esta forma se obtiene una ecuación discretizada para cada uno de los puntos de la malla o nodos.

Como se explicó en el capítulo anterior, la forma de deducir las ecuaciones de gobierno está basada en un balance dentro de un volumen de control infinitesimal. De la misma manera, el método de los volúmenes finitos está basado en un balance dentro de un volumen de control finito. Esto quiere decir que el método en sí asegura la conservación de cantidades tales como la masa, cantidad de movimiento y energía (entre otras) en cualquier número de puntos de la malla, así como en el dominio completo.

Para el desarrollo del método tomaremos el caso de la conducción de calor en estado permanente con generación de calor en una dimensión, cuya ecuación de gobierno es representada por la Ecuación (3.1), donde  $k$  es la conductividad térmica,  $T$  es la temperatura y  $S$  es la fuente de calor.

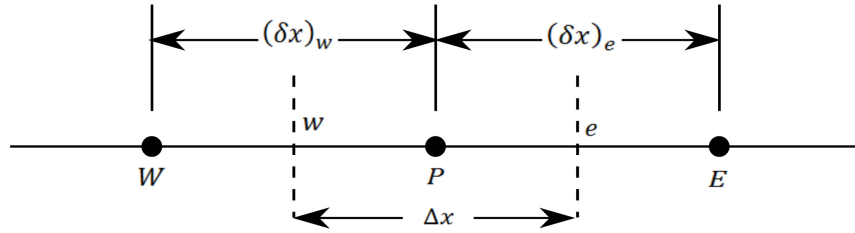
$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + S = 0 \quad (3.1)$$

que en forma vectorial sería

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + S = 0 \quad (3.2)$$

La Figura 3.2 muestra un conjunto de 3 puntos de una malla en una dimensión. Recordemos que cada punto de la malla está rodeado por un volumen de control cuyas caras están representadas por las líneas punteadas. El punto de interés  $P$  tiene un vecino a cada

lado denotados por  $E$  en la dirección  $x$  positiva y por  $W$  en la dirección  $x$  negativa. Las caras del volumen de control se denotan por letras minúsculas  $e$  y  $w$ , respectivamente. Las distancias entre los puntos de la malla son  $(\delta x)_e$  y  $(\delta x)_w$  y el espesor del volumen de control es  $\Delta x$ , mientras que para las dimensiones restantes tomamos en cuenta un espesor de 1, por lo que las dimensiones del volumen de control son  $\Delta x \times 1 \times 1$ .



**Figura 3.2:** Conjunto de puntos de la malla para una dimensión.

Si integramos la Ecuación (3.2) sobre el volumen de control descrito tendremos que

$$\int_{V.C.} [\nabla \cdot (k \nabla T) + S] dV = 0 \quad (3.3)$$

Ahora debemos recurrir al teorema de la divergencia de Gauss que establece que

$$\int_{V.C.} \nabla \cdot \phi dV = \int_{Sup} \phi \cdot \bar{n} dA \quad (3.4)$$

donde  $Sup$  es una superficie de control,  $dA$  es un diferencial de superficie y  $\bar{n}$  es un vector unitario normal a dicha superficie.

Si observamos el lado izquierdo de la Ecuación (3.4) nos podremos dar cuenta que cuantifica los cambios totales dentro de un volumen, mientras que el lado derecho cuantifica los cambios a través de la superficie. En pocas palabras el teorema de la divergencia de Gauss nos relaciona la acumulación de cierta propiedad en un volumen con las entradas y salidas netas a través de su superficie. Aplicando este teorema a la Ecuación (3.3) tendremos que

$$\int_{Sup} k \nabla T \cdot \bar{n} dA + \int_{V.C.} S dV = 0 \quad (3.5)$$

donde  $\bar{n}$  tiene 6 componentes

$$i, -i, j, -j, k, -k \quad (3.6)$$

de los cuales para nuestra ecuación unidimensional solo necesitamos  $i$  y  $-i$ , por lo que

$$\int_{Sup} k \nabla T (1) dA + \int_{Sup} k \nabla T (-1) dA + \int_{V.C.} S dV = 0 \quad (3.7)$$

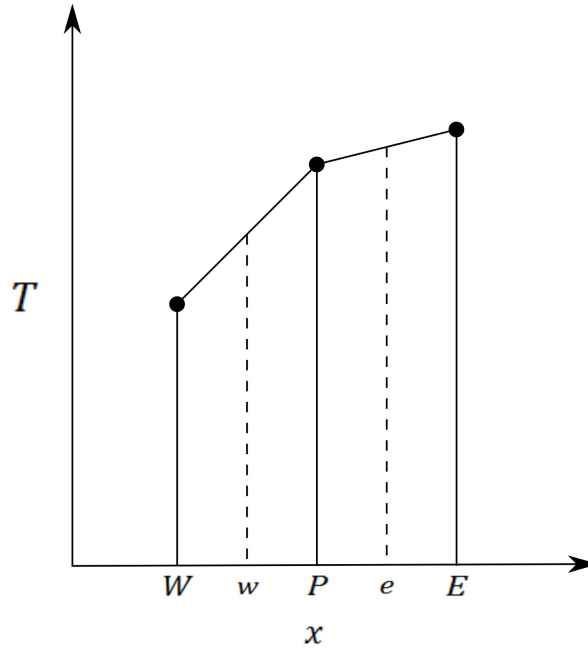
Ahora haremos una de las suposiciones más importantes en la implementación del método de los volúmenes finitos, que es suponer que los flujos son constantes en cada una de las superficies de control en las que se realiza el análisis, de manera que pueden salir de la integral:

$$(k \nabla T)_{x+\Delta x} \int_{Sup} dA - (k \nabla T)_x \int_{Sup} dA + \int_{V.C.} S dV = 0 \quad (3.8)$$

Integrando sobre el área (en este caso  $1 \times 1$ ), integrando el término fuente sobre el volumen ( $\Delta x \times 1 \times 1$ ) y volviendo a la notación diferencial obtendremos la Ecuación (3.9), donde los subíndices  $w$  y  $e$  indican que dichos términos deben ser evaluados en las caras correspondientes del elemento de control.

$$\left( k \frac{dT}{dx} \right)_e - \left( k \frac{dT}{dx} \right)_w + \int_w^e S dx = 0 \quad (3.9)$$

Para hacer esto hay que suponer la manera en la que se comportan dichos términos, para las derivadas es común suponer una variación lineal entre nodos cercanos, como el mostrado en la Figura 3.3. De esta manera podemos calcular fácilmente la pendiente de la recta en cada cara del elemento. Por lo tanto, al evaluar las derivadas en ambas caras del volumen de control, obtendremos la siguiente ecuación discretizada:



**Figura 3.3:** Ajuste a una tendencia lineal de  $T$  entre nodos adyacentes.

$$\frac{k_e (T_E - T_P)}{(\delta x)_e} - \frac{k_w (T_P - T_W)}{(\delta x)_w} + \bar{S} \Delta x = 0 \quad (3.10)$$

Este método de discretización da como resultado una expresión parecida a la que se obtendría con diferencias finitas y de hecho es lo que se conoce como una diferencia central. Observamos que aún tenemos que evaluar los términos  $k_e$  y  $k_w$ , para esto hay que suponer de igual manera un comportamiento de la variación de la propiedad, de esto se hablará en la Sección 3.3. El término  $\bar{S}$  expresa el valor promedio de la fuente de calor sobre el volumen de control. En ocasiones el término fuente es una función de la variable dependiente, en este caso de la temperatura  $T$ , por lo que debemos establecer una relación entre ambos. La mejor opción es optar por un comportamiento lineal ya que, de hecho, las ecuaciones discretizadas resultantes serán ecuaciones lineales. Por lo tanto el término  $\bar{S}$  se representa mediante la siguiente expresión:

$$\bar{S} = S_C + S_P T_P \quad (3.11)$$

donde  $S_C$  es la parte constante y  $S_P$  es la parte proporcional a la variable dependiente. Sustituyendo el término anterior y haciendo un poco de álgebra podemos llegar a expresar la ecuación discretizada de la siguiente manera:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \quad (3.12)$$

donde

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e} \quad (3.13a)$$

$$a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_w} \quad (3.13b)$$

$$a_P = a_E + a_W - S_P \Delta x \quad (3.13c)$$

$$b = S_C \Delta x \quad (3.13d)$$

Podemos observar que la ecuación (3.12) es una ecuación lineal con tres incógnitas,  $T_P$ ,  $T_E$  y  $T_W$  con coeficientes  $a_P$ ,  $a_E$  y  $a_W$ , respectivamente, expresados en las ecuaciones (3.13a) a (3.13c) y con  $b$  constante. Esta ecuación se aplica para todos y cada uno de los puntos de la malla resultando entonces en un sistema de ecuaciones lineales fácil de resolver por un método directo como el TDMA (Sección 3.8).

Esta ecuación discretizada aplica para una sola dimensión, sin embargo el número de nodos vecinos aumenta para dos y tres dimensiones, por lo que es común expresarla también de la siguiente manera, donde el subíndice  $nb$  denota a los vecinos existentes.

$$a_P T_P = \sum a_{nb} T_{nb} + b \quad (3.14)$$

Existen cuatro reglas básicas que debe cumplir una ecuación discretizada para asegurar resultados físicamente realistas y conservación de las propiedades:

**1ª regla: Consistencia en las caras del volumen de control.** Una cara es compartida por dos volúmenes de control adyacentes, por lo que la forma en que se calculan los flujos que atraviesan dicha cara debe ser la misma para cada uno de los volúmenes. De esta manera aseguramos que lo que sale por un volumen es exactamente igual a lo que entra por el siguiente.

**2ª regla: Coeficientes positivos.** En la mayoría de las situaciones de interés, la variable de estudio es afectada por los valores en la vecindad por difusión y convección. Entonces al aumentar el valor de uno de los vecinos, el valor del punto de interés debería a su vez aumentar, esto se logra al hacer que los coeficientes del nodo y de los vecinos ( $a_P$ ,  $a_E$  y  $a_W$ ) tengan el mismo signo, ya sea positivo o negativo, sin embargo por cuestiones prácticas es más fácil optar por la opción de hacerlos positivos.

**3ª regla: Pendiente negativa del término fuente.** Al observar el coeficiente central  $a_P$  (Ecuación 3.13c) se aprecia que aunque los coeficientes de los nodos vecinos sean positivos, el efecto del término fuente puede hacer que el coeficiente  $a_P$  se vuelva negativo. Esto puede evitarse obligando al coeficiente  $S_P$  a que sea menor o igual a cero.

**4ª regla: La suma de los coeficientes vecinos.** Si una ecuación de gobierno contiene solamente derivadas de la variable dependiente, los valores  $T$  y  $T + c$  (siendo  $c$  una constante arbitraria) deberían satisfacer ambos a la ecuación diferencial que los gobierna. Esta propiedad debe ser también representada por la ecuación discretizada, por lo tanto, la Ecuación (3.14) debe ser válida incluso cuando  $T_P$  y  $T_{nb}$  sean incrementadas por una constante. Esto se logra haciendo que el coeficiente  $a_P$  sea igual

a la suma de los coeficientes vecinos  $a_{nb}$ . Obviamente esta regla no aplica en caso de que la ecuación de gobierno contenga un término fuente función de la variable dependiente, como se puede observar en la ecuación (3.13c). Sin embargo, es fácil notar que si el término  $S_p$  fuera inexistente, la regla se cumpliría.

En ocasiones se encontrarán no linealidades, por ejemplo, al resolver un problema de conducción de calor con conductividad térmica y fuente de calor dependientes de la temperatura. Debido a que las ecuaciones resultantes deben ser lineales para poder resolverlas, hay que aplicar un método iterativo para linealizar las ecuaciones. Este método consiste en lo siguiente:

1. Comenzar con una aproximación o estimación del campo de temperaturas
2. Con estas temperaturas se calculan los coeficientes de la ecuación discretizada
3. Una vez calculados los coeficientes se procede a resolver las ecuaciones para obtener nuevos valores de temperatura
4. Con estas temperaturas actualizadas se repiten los pasos 2 al 4 hasta que se alcance la convergencia. Esto ocurre cuando la diferencia entre las temperaturas en dos iteraciones consecutivas sea lo suficientemente pequeña.

## 3.2. Características de la malla

Como hemos mencionado anteriormente, la forma de discretizar el dominio es dividiéndolo en partes pequeñas dando como resultado una malla. También se han introducido ya los parámetros geométricos de la malla tales como la distancia entre dos puntos adyacentes  $(\delta x)_w$  y  $(\delta x)_e$ , y el espesor del elemento  $\Delta x$  (Figura 3.2). Todos estos parámetros geométricos no tienen por qué ser iguales para todos los puntos de la malla, incluso,  $(\delta x)_w$  y  $(\delta x)_e$  pueden ser diferentes entre sí para un punto dado. De hecho, la práctica de hacer

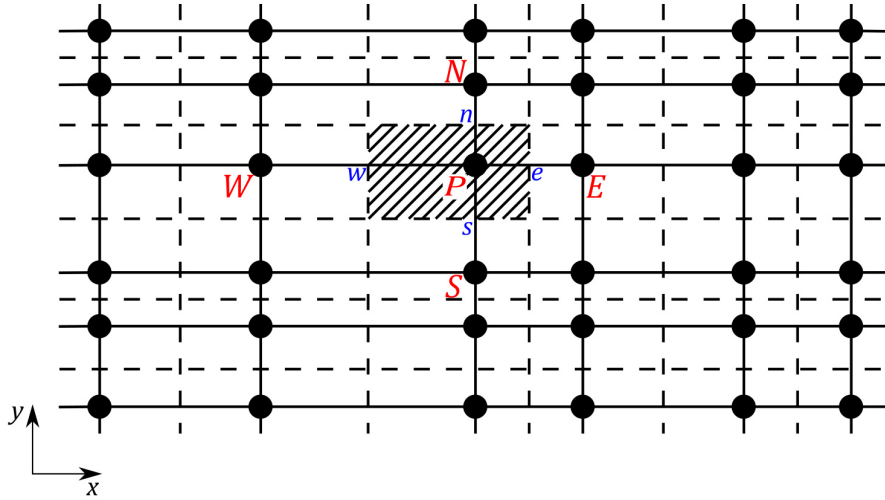


mallas no homogéneas es deseable en la mayoría de los casos de estudio. El criterio para decidir en qué partes del dominio la malla debe ser fina y cuáles debe ser gruesa, es la variación de la variable dependiente con respecto a la dirección en cuestión. Por ejemplo, en el caso de un fluido fluyendo en el espacio entre dos placas horizontales, la velocidad del fluido cambia intensamente en la dirección perpendicular al flujo, sobre todo cerca de las placas, es por eso que la malla debe ser más fina hacia dichas zonas. Mientras tanto, se observa que la velocidad a lo largo del eje  $x$  no tiene gran cambio conforme se avanza en la dirección positiva, debido a esto, los elementos de la malla pueden tener una relación de aspecto  $\Delta x/\Delta y$  aceptablemente grande.

Una vez que se ha decidido cuál será la estructura de la malla, hay que decidir dónde colocar las caras de los volúmenes de control que rodean cada punto de la malla. Se tienen dos opciones: colocar las caras justo a la mitad de la distancia entre dos puntos adyacentes o colocar el punto justo en el centro del volumen de control. A continuación se presentan las ventajas y desventajas de ambas prácticas.

**Caras localizadas en la mitad entre puntos de la malla.** La forma más obvia de construir los volúmenes de control es dibujar las caras justo a la mitad entre dos puntos adyacentes. La Figura 3.4 muestra un esquema representativo de esta práctica donde la malla está representada por líneas sólidas y las caras del volumen de control alrededor de cada punto por líneas punteadas. Las letras mayúsculas rojas representan la nomenclatura de los puntos, mientras que las letras minúsculas azules representan la nomenclatura de las caras. La ventaja de localizar las caras de esta manera es que el cálculo de las propiedades en dichas caras se simplifica a un promedio aritmético entre las propiedades de dos puntos adyacentes, como se verá en la Sección 3.3. La desventaja de esta práctica es que los puntos de la malla no están localizados en el centro geométrico de los volúmenes de control, por lo tanto el valor de cierta propiedad o variable en un punto no es una representación fiel del valor en el volumen de control, ya que en realidad está cargado hacia

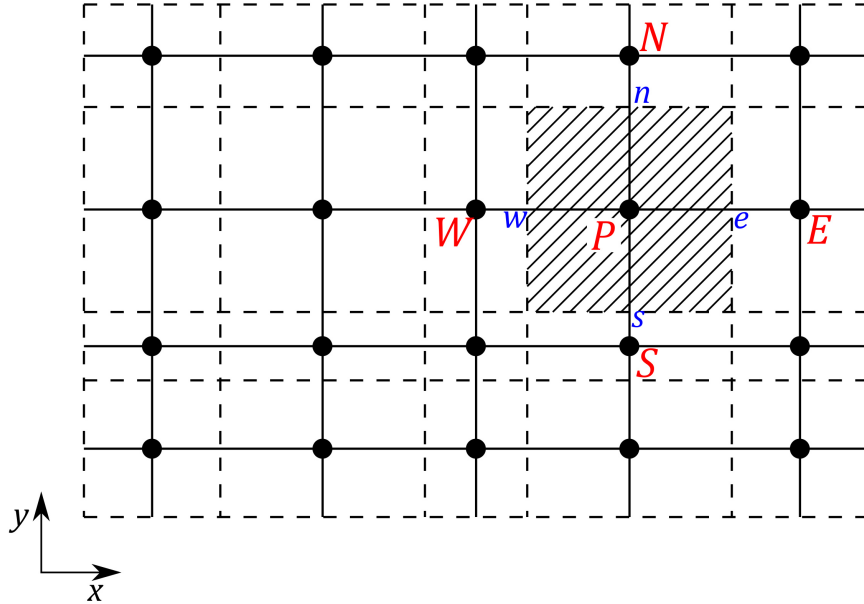
un lado. Otra desventaja es que, por ejemplo, el punto  $n$  no se encuentra a la mitad de la cara del volumen, por lo que suponer que el flujo de cierta variable en dicho punto es una representación de la cara completa, es una inexactitud.



**Figura 3.4:** Esquema representativo de una malla con las caras de los volúmenes de control en el punto medio de la distancia entre dos puntos adyacentes.

**Puntos de la malla situados en el centro de los volúmenes de control.** La segunda práctica es establecer primero los volúmenes de control y después localizar los puntos de la malla en los centros geométricos de dichos volúmenes como se muestra en la Figura 3.5. Debido a que el punto  $P$  se encuentra justo en el centro del volumen de control, se puede decir que el valor de la propiedad en  $P$  representa con bastante precisión el valor de todo el volumen. Además de esto, el punto  $e$ , por ejemplo, se encuentra justo en el centro de dicha cara, por lo que los flujos calculados en dicho punto representan de buena manera el flujo a través de toda la cara. La única desventaja de esta práctica es el hecho de que cierta cara no se encuentra a la mitad entre dos puntos adyacentes, esto dificulta un poco el cálculo de las propiedades y flujos en las caras, ya que hay que considerar las distancias entre los puntos y la cara. Esto conlleva a la necesidad de utilizar un promedio ponderado

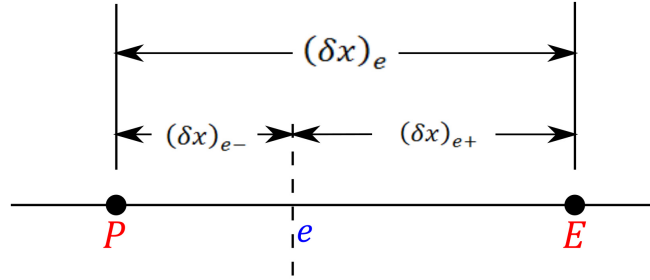
para dichos cálculos como se verá en la Sección 3.3.



**Figura 3.5:** Esquema representativo de una malla con los puntos en el centro de los volúmenes de control.

### 3.3. Propiedades físicas en la interfaz

Como se ha comentado a lo largo del documento, es necesario calcular las propiedades físicas tales como densidad, conductividad térmica, viscosidad o difusividad másica en las caras de los volúmenes de control para poder llevar a cabo la discretización de las ecuaciones correctamente. Retomando el ejemplo de la conducción de calor en una dimensión, el término  $k_e$  representa la conductividad térmica del medio en la cara *este* del volumen de control. En el caso de que la conductividad térmica  $k$  sea función de la temperatura, sólo se conocen los valores de la temperatura en los puntos de la malla  $W$ ,  $P$  y  $E$ , y por lo tanto las conductividades térmicas sólo pueden evaluarse en dichos puntos, en consecuencia, necesitamos una expresión que calcule la conductividad en las caras del volumen a partir de los valores disponibles en los puntos de la malla.



**Figura 3.6:** Esquema representativo de dos puntos de una malla en una dimensión.

La práctica más sencilla es suponer un comportamiento lineal entre los valores de dos puntos consecutivos de la malla. Si tomamos como ejemplo los puntos mostrados en la Figura 3.6, observaremos que al aplicar un promedio ponderado obtendremos la siguiente expresión para el cálculo de la conductividad:

$$k_e = f_e k_P + (1 - f_e) k_E \quad (3.15)$$

donde

$$f_e = \frac{(\delta x)_{e+}}{(\delta x)_e} \quad (3.16)$$

El término  $f_e$  representa la fracción de la distancia correspondiente al volumen alrededor del punto  $E$ , mientras que  $(1 - f_e)$  es la fracción correspondiente al punto  $P$ . Si la interfaz  $e$  estuviera colocada justo en el punto medio entre los puntos  $P$  y  $E$  entonces la ecuación (3.15) representa la media aritmética entre los valores de los dos puntos.

Esta práctica es aplicable en el caso de que las propiedades en el medio no tengan cambios abruptos, por ejemplo, en el caso de la interfaz entre dos materiales diferentes, dicha práctica llevaría a resultados incorrectos. Una manera de lidiar con este problema es reconocer que lo que importa no es en sí el valor de la conductividad en la interfaz, sino el valor del flujo de calor. En el caso de la conducción de calor en estado estable en una dimensión sin fuentes de calor, la ecuación discretizada es

$$q_e = \frac{k_e (T_P - T_E)}{(\delta x)_e} \quad (3.17)$$

Si suponemos que el volumen alrededor del punto  $P$  es de cierto material con conductividad térmica  $k_P$  y el que rodea al punto  $E$  es de un material diferente con conductividad  $k_E$ , entonces la ecuación discretizada es la siguiente.

$$q_e = \frac{T_P - T_E}{(\delta x)_{e-}/k_P + (\delta x)_{e+}/k_E} \quad (3.18)$$

Si combinamos las ecuaciones (3.18) y (3.16) tendremos que la conductividad térmica en la interfaz será:

$$k_e = \left( \frac{1 - f_e}{k_P} + \frac{f_e}{k_E} \right)^{-1} \quad (3.19)$$

y si localizamos la cara  $e$  justo a la mitad entre los puntos  $P$  y  $E$ , tendremos que  $f_e = 0.5$  y entonces

$$k_e = \left( \frac{0.5}{k_P} + \frac{0.5}{k_E} \right)^{-1} = \frac{2k_P k_E}{k_P + k_E} \quad (3.20)$$

que representa la media armónica entre los valores de las conductividades térmicas de los puntos  $P$  y  $E$ . Mediante esta práctica se obtienen resultados más realistas físicamente, por ejemplo, si el punto  $E$  tuviera una conductividad de 0, representando a un aislante térmico, de acuerdo con la ecuación (3.20) la conductividad en la cara  $e$  sería igualmente cero dando lugar a un flujo de calor inexistente, lo cual representa realmente el comportamiento físico de un aislante térmico. Mediante la primera práctica, al ser un promedio aritmético, obtendríamos la mitad de la conductividad del punto  $P$  lo cual llevaría a un flujo de calor diferente de cero dando lugar a resultados físicamente irreales.

### 3.4. Término transitorio

Muchas veces es de gran interés observar la evolución temporal de cierto fenómeno. Para esto necesitamos incluir el término temporal en las ecuaciones de gobierno y discretizarlo. Para ejemplificar esto retomaremos el caso de la conducción de calor en una dimensión y añadiremos el término transitorio dejando de lado la fuente de calor, la ecuación de gobierno es entonces

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (3.21)$$

donde  $\rho$  y  $c$  son la densidad y el calor específico del medio respectivamente y se considerarán constantes.

Una ecuación diferencial transitoria siempre necesita de una condición inicial para ser resuelta, de la misma manera para la ecuación discretizada necesitamos de una distribución de temperaturas inicial en cierto tiempo  $t$  para obtener una nueva distribución en un tiempo  $t + \Delta t$ . A los valores iniciales se les denotará por  $T_P^0$ ,  $T_E^0$  y  $T_W^0$ , mientras que a los valores desconocidos se les seguirá denotando por  $T_P$ ,  $T_E$  y  $T_W$ . Para obtener la ecuación discretizada tendremos que integrar sobre el volumen de control como lo hemos venido haciendo hasta ahora pero además tendremos que integrar sobre un intervalo de tiempo  $\Delta t$  resultando en:

$$\rho c \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt \quad (3.22)$$

donde el orden de integración depende de la naturaleza del término, por ejemplo, el término temporal se integra primero con respecto al tiempo, mientras que el término difusivo se integra primero sobre el volumen de control. Para representar el término transitorio se supondrá que el valor de  $T$  es único dentro de todo el volumen de control, por lo que

$$\rho c \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx = \rho c \Delta x (T_P - T_P^0) , \quad (3.23)$$

mientras que para el término difusivo aplicamos el método usual de discretización:

$$\rho c \Delta x (T_P - T_P^0) = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{k_e (T_E - T_P)}{(\delta x)_e} - \frac{k_w (T_P - T_W)}{(\delta x)_w} \right] dt \quad (3.24)$$

Ahora, para evaluar la integral temporal es necesario definir cómo varía la temperatura a lo largo del tiempo. Si los pasos de tiempo son suficientemente pequeños podríamos decir que la variación es lineal y definir la integral como sigue:

$$\int_t^{t+\Delta t} T_P dt = [f_t T_P + (1 - f_t) T_P^0] \Delta t \quad (3.25)$$

donde  $f_t$  es un factor de peso con valores entre 0 y 1. Usando el mismo principio para evaluar las integrales de  $T_E$  y  $T_W$  y sustituyendo en la ecuación (3.24) tendremos

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} (T_P - T_P^0) = f_t \left[ \frac{k_e (T_E - T_P)}{(\delta x)_e} - \frac{k_w (T_P - T_W)}{(\delta x)_w} \right] \\ + (1 - f_t) \left[ \frac{k_e (T_E^0 - T_P^0)}{(\delta x)_e} - \frac{k_w (T_P^0 - T_W^0)}{(\delta x)_w} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Si arreglamos los términos de acuerdo a la forma general de discretización obtendremos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} a_P T_P = a_E [f_t T_E + (1 - f_t) T_E^0] + a_W [f_t T_W + (1 - f_t) T_W^0] \\ + [a_P^0 - (1 - f_t) a_E - (1 - f_t) a_W] T_P^0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde

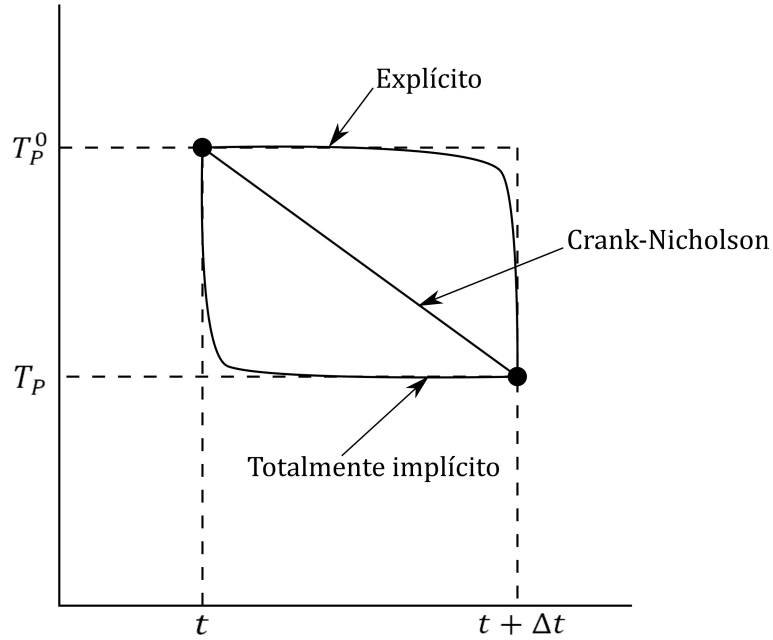
$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e} \quad (3.28a)$$

$$a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_w} \quad (3.28b)$$

$$a_P^0 = \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} \quad (3.28c)$$

$$a_P = f_i a_E + f_i a_W + a_P^0 \quad (3.28d)$$

Existen tres esquemas de discretización típicos para diferentes valores de  $f_i$ . El esquema *explícito* resulta de hacer  $f_i = 0$ ; si elegimos  $f_i = 0.5$  tendremos el esquema de *Crank-Nicholson*, y por último  $f_i = 1$  nos lleva al esquema totalmente *implícito*.



**Figura 3.7:** Variación de la temperatura en el tiempo para los tres esquemas.



### 3.4.1. Esquema explícito

El esquema explícito, que resulta de hacer  $f_t = 0$ , supone que el valor de la variable, en este caso  $T$ , en el punto  $P$  prevalece durante todo el intervalo de tiempo  $\Delta t$  excepto al llegar al final cuando  $t = t + \Delta t$  como se observa en la Figura 3.7. Al sustituir  $f_t = 0$  en la ecuación (3.27), esta se convierte en

$$a_P T_P = a_E T_E^0 + a_W T_W^0 + (a_P^0 - a_E - a_W) T_P^0 \quad (3.29)$$

Esto significa que el valor  $T_P$  depende explícitamente de los valores de temperatura de los nodos vecinos en el paso de tiempo anterior y no de las temperaturas desconocidas en  $t + \Delta t$ . Se puede observar entonces que las temperaturas desconocidas en cada punto son calculables directamente sin la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones lineales. A primera vista, este esquema es el que más facilita la solución de las ecuaciones, sin embargo, tiene la desventaja de que el coeficiente de  $T_P^0$  puede tener valores negativos si  $a_P^0$  fuera menor que la suma de  $a_E$  y  $a_W$ . Esto viola directamente la segunda regla general pudiendo resultar en valores físicamente irreales.

### 3.4.2. Esquema Crank-Nicholson

Cualquier valor de  $f_t$  diferente de cero dará lugar a un esquema implícito debido a que el valor en el punto  $P$  dependerá de los valores de los nodos vecinos tanto en el tiempo  $t$  como en  $t + \Delta t$ . Si analizamos la Figura 3.7, el esquema *Crank-Nicholson* predice un cambio gradual de la temperatura al avanzar en el intervalo de tiempo, debido a esto pareciera ser el esquema más conveniente. A pesar de esto, este esquema cuenta también con la desventaja de posibles coeficientes negativos. El coeficiente de  $T_P^0$  al hacer  $f_t = 0.5$  en la ecuación (3.27) es  $a_P^0 - (a_E + a_W)/2$  en el cual podemos identificar fácilmente la inconveniencia de dicho esquema.

### 3.4.3. Esquema totalmente implícito

Para cumplir con el requerimiento de que el coeficiente de  $T_P^0$  sea siempre positivo el valor de  $f_t$  debe ser igual a la unidad. Es por esto que el esquema totalmente implícito es el más comúnmente usado.

El principio de este esquema es que el valor de  $T_P$  permanece constante durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$  y depende de los valores de los puntos vecinos  $T_E$  y  $T_W$ , además del valor en el paso de tiempo anterior  $T_P^0$ . Esto da como resultado un sistema de ecuaciones lineales simultáneas.

Si introducimos el término fuente  $\bar{S} = S_C + S_P T_P$  en la ecuación (3.27) y sustituimos  $f_t = 1$  tendremos la ecuación:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \quad (3.30)$$

donde

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e} \quad (3.31a)$$

$$a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_w} \quad (3.31b)$$

$$a_P^0 = \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} \quad (3.31c)$$

$$b = S_C \Delta x + a_P^0 T_P^0 \quad (3.31d)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_P^0 - S_P \Delta x \quad (3.31e)$$

## 3.5. Esquemas convectivos

Hasta este momento hemos desarrollado la ecuación de discretización del término temporal, el término difusivo y el término fuente para la temperatura, sin embargo, este método aplica para cualquier variable  $\phi$  con coeficiente de difusividad  $\Gamma$ . Ahora incluiremos el

término convectivo de la ecuación de gobierno.

Como sabemos la convección es debida al movimiento de un fluido, por lo tanto para calcular el término convectivo necesitamos conocer previamente el campo de velocidades del medio. En este momento supondremos que conocemos dicho campo y en la Sección 3.7 veremos como calcularlo numéricamente.

Tomaremos el caso más simple posible para desarrollar la discretización de la ecuación diferencial: una ecuación de convección-difusión en una dimensión en estado estable y sin término fuente,

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (3.32)$$

donde  $u$  representa la velocidad en la dirección  $x$ . Se sabe además que la ecuación de continuidad en una dimensión es

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad (3.33)$$

que físicamente significa que el producto  $\rho u$  siempre debe mantenerse constante. Usaremos la figura 3.2 para representar los puntos de la malla. Las fronteras  $w$  y  $e$ , como hemos visto, pueden estar en cualquier lugar. Por conveniencia supondremos que dichas caras se encuentran justo a la mitad entre los puntos.

### 3.5.1. Diferencias centrales

Si integramos la ecuación (3.32) sobre el volumen de control obtendremos que

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_w \quad (3.34)$$

Si aplicamos la misma metodología que hemos venido aplicando hasta ahora de aproximar las variables en la interfaz mediante una interpolación lineal tendremos que la variable  $\phi$  en las caras  $e$  y  $w$  es

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) \quad \text{y} \quad \phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \quad (3.35)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.34) y aplicando la estrategia de discretización usual de aproximar las derivadas en las caras del volumen de control mediante la suposición del perfil a pasos (también llamada diferencias centrales) para los términos difusivos tendremos

$$\frac{1}{2}(\rho u)_e(\phi_E + \phi_P) - \frac{1}{2}(\rho u)_w(\phi_E + \phi_P) = \frac{\Gamma_e(\phi_E - \phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\Gamma_w(\phi_P - \phi_W)}{(\delta x)_w} \quad (3.36)$$

donde los valores de  $\rho u$  y  $\Gamma$  en las fronteras se calculan de la forma propuesta en la sección 3.3.

Definiremos ahora dos nuevas variables,  $D$  que representa los coeficientes difusivos y  $F$  que representa los coeficientes convectivos, ambos tienen las mismas unidades y se definen como sigue

$$D = \frac{\Gamma}{(\delta x)} \quad \text{y} \quad F = \rho u \quad (3.37)$$

Cabe resaltar que  $D$  siempre tendrá signo positivo, mientras que  $F$  puede tomar cualquier signo dependiendo de la dirección de la velocidad. Introduciendo estos términos, la ecuación discretizada es

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W \quad (3.38)$$

donde

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \quad (3.39a)$$

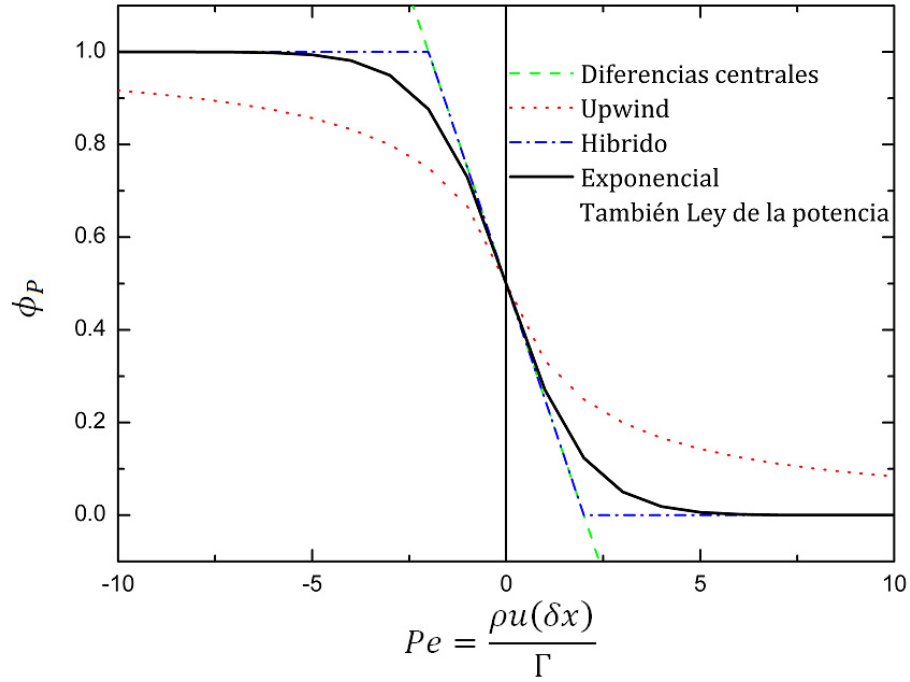
$$a_W = D_w - \frac{F_w}{2} \quad (3.39b)$$

$$a_P = D_e + \frac{F_e}{2} + D_w + \frac{F_w}{2} \quad (3.39c)$$

$$= a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (3.39d)$$

Debido a que la ecuación de continuidad establece que  $F = \rho u$  debe ser constante,  $F_e = F_w$  y el coeficiente  $a_P$  cumple con la cuarta regla básica. A pesar de esto, observamos que los coeficientes  $a_E$  y  $a_W$  pueden llegar a ser negativos en el caso de que la velocidad en los coeficientes convectivos  $F_e$  y  $F_w$  sea positiva y estos sean mayores a los difusivos  $D_e$  y  $D_w$ , lo cual incumple con la segunda regla, de hecho cualquier valor de  $F \geq 2D$  da resultados incoherentes. Esto nos indica que dicho método es aplicable solo en el caso de bajos números de Reynolds o relaciones  $F/D$  menores a 2. Esta relación es conocida como el número de *Peclet* ( $Pe$ ) y, como hemos visto, representa cómo es el transporte convectivo respecto al difusivo en el medio. La solución a este problema es utilizar una aproximación diferente a la actualmente empleada. Existen varias alternativas de esquemas de discretización para el término convectivo, dentro de las que se encuentran el *Upwind*, *Híbrido*, *Ley de la potencia* o *Exponencial*, los cuales se muestran en la Figura 3.8. Para esta figura se tomaron los valores de  $\phi_W = 0$  y  $\phi_E = 1$  y se realizó el cálculo de  $\phi_P$  para diferentes números de Peclet utilizando los distintos esquemas de convección mencionados. Podemos observar que a números de Peclet altos, el valor de la variable en el punto  $P$  toma el valor del vecino que se encuentra corriente arriba, comportamiento clásico de un fenómeno convectivo, mientras que al acercarse a Peclet bajos la variable toma un valor medio entre los dos vecinos mostrando el comportamiento de una difusión dominante.

Cada uno tiene sus propias ventajas y desventajas, por ejemplo, el *Upwind* representa



**Figura 3.8:** Predicción de la variable  $\phi_P$  a diferentes números de Peclet para distintos esquemas de convección.

de forma realista el fenómeno físico, sin embargo los resultados tienen cierto error respecto a la solución exacta. El método híbrido es un esquema a pasos que aproxima la solución dependiendo del valor del número de Peclet, de hecho, a bajos números de Peclet se aproxima como diferencias centrales, mientras que a  $|Pe| > 2$ , toma la forma del *Upwind*, de ahí el nombre *Híbrido*. El esquema exponencial resulta de emplear la solución analítica para aproximar los términos convectivos, es por esto que es el esquema que representa la solución real más precisamente, sin embargo, su costo computacional es muy elevado. Por su parte, el método de la ley de la potencia es una muy buena aproximación a la solución real sin tan alto costo computacional (de hecho en la Figura 3.8 las líneas del método exponencial y de la ley de la potencia son tan similares que no se nota la diferencia de ambas). La elección de cierto esquema dependerá obviamente del número de Peclet del problema y de los recursos computacionales que se tengan disponibles. En nuestro caso

optamos por utilizar el esquema Upwind ya que es el que otorga resultados realistas con el menor costo computacional.

### 3.5.2. Esquema Upwind

Uno de los remedios más usados para evitar los problemas antes mencionados es el esquema llamado Upwind o Upstream, que significa *corriente arriba* o *aguas arriba*. El inconveniente del esquema de diferencias centrales está en que considera la propiedad convectiva en la interfaz como el promedio entre los valores de los puntos adyacentes. Este método propone una manera diferente de aproximar los términos convectivos en dicha cara, mientras que los términos difusivos se mantienen sin cambios.

El esquema *Upwind* propone que el valor de la variable  $\phi$  en cierta cara toma el valor del nodo que se encuentra corriente arriba, esto es

$$\phi_e = \phi_P \quad \text{cuando} \quad F_e > 0 \quad (3.40)$$

y

$$\phi_e = \phi_E \quad \text{cuando} \quad F_e < 0 \quad (3.41)$$

Lo cual aplica de igual manera para la cara  $w$ . Definimos un nuevo operador  $\|A, B\|$  para indicar que escogeremos el valor que sea mayor de los dos contenidos en este. De esta manera, el método *Upwind* implica que

$$F_e \phi_e = \phi_P \|F_e, 0\| - \phi_E \|-F_e, 0\| \quad (3.42)$$

Introduciendo este concepto en la ecuación discretizada tendremos

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (3.43)$$

donde

$$a_E = D_e + \|-F_e, 0\| \quad (3.44a)$$

$$a_W = D_w + \|F_w, 0\| \quad (3.44b)$$

$$a_P = D_e + \|F_e, 0\| + D_w + \|-F_w, 0\| \quad (3.44c)$$

$$= a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (3.44d)$$

La cual es la ecuación general discretizada en una dimensión para un fenómeno de convección-difusión para una variable  $\phi$  con  $D = \Gamma / (\delta x)$  y  $F = \rho u$ .

### 3.6. Ecuación final discretizada

Por último, combinaremos todos los esquemas de discretización antes descritos, aplicándolos a la ecuación general de gobierno para una variable  $\phi$  en dos dimensiones. Hasta ahora hemos desarrollado los métodos de discretización en una sola dimensión considerando únicamente las fronteras  $E$  y  $W$ ; para dos dimensiones se consideran además las fronteras  $N$  y  $S$  y los esquemas de discretización se aplican de la misma manera. La ecuación de gobierno es entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S \quad (3.45)$$

donde los términos convectivos y difusivos se han agrupado en la variable  $J$  que representa el flujo total de la propiedad  $\phi$

$$J_x \equiv \rho u\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.46)$$

$$J_y \equiv \rho v\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3.47)$$



Aplicaremos primero el esquema de discretización temporal totalmente implícito suponiendo una densidad constante e integraremos sobre el volumen de control para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\rho_P^0 (\phi_P - \phi_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + \left[ (\rho u)_e \phi_e - \Gamma_e \frac{\partial \phi_e}{\partial x} \right] \Delta y - \left[ (\rho u)_w \phi_w - \Gamma_w \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \right] \Delta y \\ + \left[ (\rho v)_n \phi_n - \Gamma_n \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \right] \Delta x - \left[ (\rho v)_s \phi_s - \Gamma_s \frac{\partial \phi_s}{\partial y} \right] \Delta x = (S_C + S_P \phi_P) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde el término fuente ha sido linealizado de la forma tradicional. Aplicaremos ahora la discretización de las derivadas de  $\phi$  en las caras del volumen de control por diferencias centrales quedando

$$\begin{aligned} \frac{\rho_P^0 (\phi_P - \phi_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + \left[ (\rho u)_e \phi_e - \Gamma_e \frac{\Delta \phi_e}{(\delta x)_e} \right] \Delta y - \left[ (\rho u)_w \phi_w - \Gamma_w \frac{\Delta \phi_w}{(\delta x)_w} \right] \Delta y \\ + \left[ (\rho v)_n \phi_n - \Gamma_n \frac{\Delta \phi_n}{(\delta y)_n} \right] \Delta x - \left[ (\rho v)_s \phi_s - \Gamma_s \frac{\Delta \phi_s}{(\delta y)_s} \right] \Delta x = (S_C + S_P \phi_P) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde

$$\Delta \phi_e = \phi_E - \phi_P \quad (3.50a)$$

$$\Delta \phi_w = \phi_P - \phi_W \quad (3.50b)$$

$$\Delta \phi_n = \phi_N - \phi_P \quad (3.50c)$$

$$\Delta \phi_s = \phi_P - \phi_S \quad (3.50d)$$

Introduciremos ahora los términos  $D$  y  $F$  para simplificar la ecuación anterior, dando como resultado:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_P^0 (\phi_P - \phi_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + [F_e \phi_e - D_e (\phi_E - \phi_P)] - [F_w \phi_w - D_w (\phi_P - \phi_W)] \\ + [F_n \phi_n - D_n (\phi_N - \phi_P)] - [F_s \phi_s - D_s (\phi_P - \phi_S)] = (S_C + S_P \phi_P) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde

$$F_e = (\rho u)_e \quad y \quad D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \quad (3.52a)$$

$$F_w = (\rho u)_w \quad y \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \quad (3.52b)$$

$$F_n = (\rho v)_n \quad y \quad D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \quad (3.52c)$$

$$F_s = (\rho v)_s \quad y \quad D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \quad (3.52d)$$

Recordemos que las propiedades tales como  $\rho$ ,  $u$  y  $\Gamma$  deben ser calculadas en las caras mediante alguna forma de interpolación entre los valores de los nodos adyacentes a cada cara. Si aplicamos ahora el principio del esquema Upwind tendremos que

$$F_e \phi_e = \phi_P \|F_e, 0\| - \phi_E \|-F_e, 0\| \quad (3.53a)$$

$$F_w \phi_w = \phi_W \|F_w, 0\| - \phi_P \|-F_w, 0\| \quad (3.53b)$$

$$F_n \phi_n = \phi_P \|F_n, 0\| - \phi_N \|-F_n, 0\| \quad (3.53c)$$

$$F_s \phi_s = \phi_S \|F_s, 0\| - \phi_P \|-F_s, 0\| \quad (3.53d)$$

Si sustituimos las ecuaciones (3.53a) a (3.53d) en la ecuación (3.51) y agrupamos términos tendremos:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\rho_P^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t} + D_e + \|F_e, 0\| + D_w + \|-F_w, 0\| + D_n + \|F_n, 0\| + D_s + \|-F_s, 0\| - S_P \Delta x \Delta y \right) \phi_P \\ &= (D_e + \|-F_e, 0\|) \phi_E + (D_w + \|F_w, 0\|) \phi_W + (D_n + \|-F_n, 0\|) \phi_N \\ & \quad + (D_s + \|F_s, 0\|) \phi_S + \frac{\rho_P^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t} \phi_P^0 + S_C \Delta x \Delta y \quad (3.54) \end{aligned}$$

Así podemos definir nuestra ecuación general discretizada como

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (3.55)$$

donde

$$a_E = D_e + \|-F_e, 0\| \quad (3.56a)$$

$$a_W = D_w + \|F_w, 0\| \quad (3.56b)$$

$$a_N = D_n + \|-F_n, 0\| \quad (3.56c)$$

$$a_S = D_s + \|F_s, 0\| \quad (3.56d)$$

$$a_P^0 = \frac{\rho_P^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (3.56e)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y + (F_e + F_w + F_n + F_s) \quad (3.56f)$$

$$b = a_P^0 \phi_P^0 + S_C \Delta x \Delta y \quad (3.56g)$$

Obviamente, si la ecuación de continuidad se cumple, los términos dentro del paréntesis de la ecuación (3.56f) desaparecen.

### 3.7. Campo de flujo

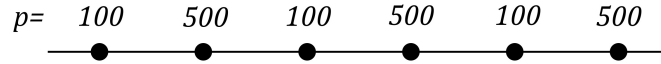
Ya hemos desarrollado el método de discretización de cualquier ecuación general de transporte y durante todo el desarrollo se ha supuesto que se conoce el campo de flujo (i.e. velocidad y densidad), a partir del cual se calculan los términos convectivos. Inconvenientemente, muchas veces no es posible conocer de antemano el campo de flujo por lo que es de gran interés calcularlo numéricamente. Este método de discretización se puede aplicar también a las ecuaciones de Navier-Stokes y a la ecuación de continuidad, de donde en principio se podría obtener el campo de flujo, sin embargo, esto no es tan fácil como parece. La dificultad no está en las no linealidades que posee el modelo de Navier-Stokes (las cuales se pueden resolver mediante métodos iterativos). Si observamos bien dichas ecuaciones nos podremos dar cuenta de que aparece el término del gradiente de presión el cual se toma como parte del término fuente. Es el desconocimiento de dicho campo de presiones el mayor problema al momento de resolver las ecuaciones de cantidad de

movimiento.

Si quisiéramos discretizar el gradiente de presión  $-dp/dx$  mediante su integración en el volumen de control y suponemos que las caras se encuentran a la mitad entre los nodos tendríamos

$$p_w - p_e = \frac{p_w + p_P}{2} - \frac{p_P + p_E}{2} = \frac{p_w - p_E}{2} \quad (3.57)$$

Lo cual significa que en la ecuación de cantidad de movimiento tendríamos diferencias de presión entre dos nodos alternados y no adyacentes. Proponemos un campo de presiones como el mostrado en la Figura 3.9 (el cual es físicamente imposible) y observamos que para cualquier punto  $P$ , la diferencia  $p_w - p_E$  es cero, lo cual el método numérico estaría interpretando como un campo de presiones uniforme, siendo que en realidad no lo es.



**Figura 3.9:** Campo de presión tipo zig-zag.

Lo mismo ocurre al tratar de discretizar la ecuación de continuidad en estado permanente con densidad constante en una dimensión que es simplemente:

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad (3.58)$$

Si la integramos en el volumen de control y suponemos las interfaces en el punto medio de la distancia entre nodos tendremos

$$u_e - u_w = \frac{u_P + u_E}{2} - \frac{u_W + u_P}{2} \quad (3.59)$$

o lo que es lo mismo

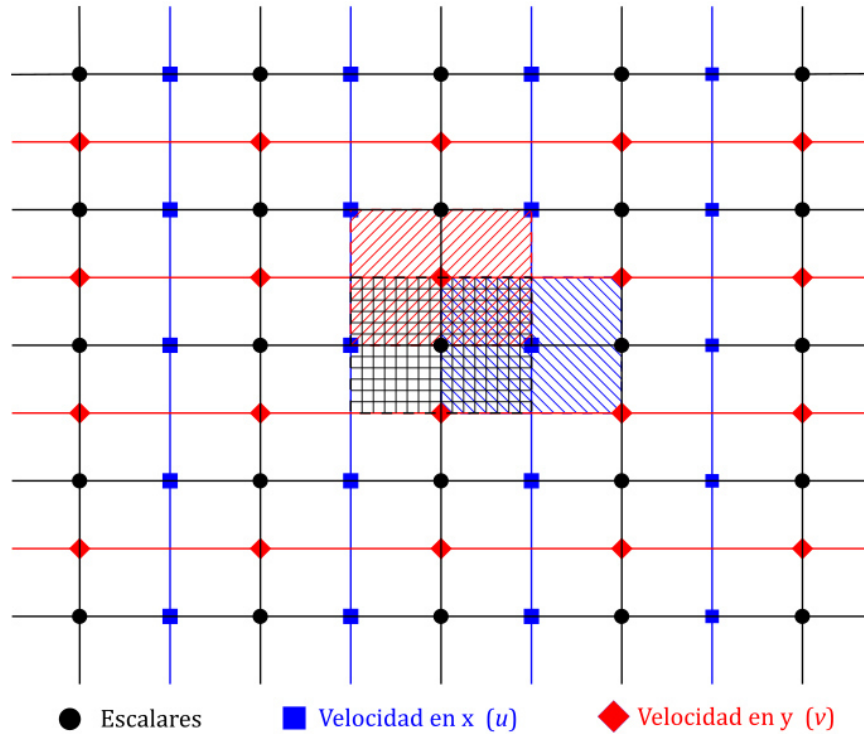
$$u_E - u_W = 0 \quad (3.60)$$

Es fácilmente observable que presenta el mismo problema de la presión al considerar diferencias de velocidad en dos nodos alternados y no adyacentes. Esto implica que si suponemos un campo de velocidades como el propuesto anteriormente para la presión, dicho campo físicamente irreal satisface la ecuación de continuidad, lo cual es algo indeseable. Lo adecuado es que solamente resultados realistas cumplan con la ecuación de continuidad.

### 3.7.1. Mallas desplazadas

Para evitar todos los problemas que hemos encontrado hasta ahora con las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad, se propone calcular las componentes de la velocidad en mallas diferentes a las utilizadas por todas las demás variables. La idea es desplazar la malla de la velocidad de manera que los nodos de ésta queden localizados en los lugares en que se encuentran las caras de los volúmenes de control de la malla original. Como se muestra en la Figura 3.10, la malla para  $u$ , componente de la velocidad en la dirección  $x$ , está desplazada hacia la derecha de manera tal que los nodos queden localizados en las caras del volumen de control para los escalares. De igual manera, la malla de  $v$ , componente de la velocidad en la dirección  $y$ , se encuentra desplazada hacia arriba.

De esta manera podemos observar que cierto punto de la malla de  $u$ , queda localizado a la mitad entre dos puntos adyacentes de la malla de la presión, así se eliminan los problemas antes mencionados para la ecuación de cantidad de movimiento. De igual forma, recordemos que la ecuación de continuidad requiere información de los cambios en la densidad, misma que se calcula en la malla de los escalares. Como consecuencia, las velocidades involucradas son tomadas de dos nodos adyacentes en la malla correspondiente evitando así los problemas involucrados con la ecuación de continuidad.



**Figura 3.10:** Mallas desplazadas para la velocidad en las direcciones  $x$  y  $y$ .

### 3.7.2. Corrección de presión y velocidad

A pesar de haber resuelto ya las complicaciones presentadas por el gradiente de presión en la ecuación de transporte de cantidad de movimiento, y por el término convectivo en la ecuación de continuidad, aún falta resolver el problema del cálculo del campo de presiones. Como se ha mencionado, el campo de presiones es resultado indirecto de la ecuación de continuidad, para la cual necesitamos el campo de velocidades que a su vez necesita del campo de presiones para ser calculado. Es aquí donde entramos a un círculo vicioso del cual solamente se puede salir mediante métodos iterativos, es decir suponer un campo de presiones y mediante cálculos sucesivos acercarnos a la solución correcta.

Para el desarrollo de este método iterativo establecemos primero las ecuaciones discretizadas de transporte de cantidad de movimiento en dos dimensiones como

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (p_P - p_E) A_e \quad (3.61)$$

y

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b + (p_P - p_N) A_n \quad (3.62)$$

donde los subíndices  $e$  y  $n$  se refieren a que la velocidad  $u$  está ubicada en la cara  $e$  del volumen de control de los escalares, mientras que la velocidad  $v$  se encuentra en la cara  $n$ .

La solución de estas ecuaciones solamente podrá llevarse a cabo cuando se posea el campo de presiones, ya sea que se conozca de antemano o que se calcule de alguna manera. Si no conocemos dicho campo de antemano, podemos suponer un campo arbitrario que denotaremos por  $p^*$ . Dicho campo supuesto, al no ser el correcto, dará lugar a un campo de velocidades igualmente incorrecto, denotado por  $u^*$  y  $v^*$ , resultado de resolver las siguientes ecuaciones discretizadas:

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + (p_P^* - p_E^*) A_e \quad (3.63)$$

y

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b + (p_P^* - p_N^*) A_n \quad (3.64)$$

El objetivo ahora es, de alguna manera, mejorar los campos de presión y velocidad mediante alguna corrección de la forma

$$p = p^* + p' \quad (3.65)$$

donde  $p'$  es llamada la corrección de presión. Aplicando la misma idea a la velocidad, la corrección en la presión debe afectar a la velocidad, así que la velocidad será corregida en función de la corrección de la presión. Las correcciones a la velocidad son de la misma forma:

$$u = u^* + u' \quad \text{y} \quad v = v^* + v' \quad (3.66)$$

Si restamos las ecuaciones (3.61) y (3.63) tendremos

$$a_e u'_e = \sum a_{nb} u'_{nb} + (p'_P - p'_E) A_e \quad (3.67)$$

Para simplificar esta ecuación decidimos eliminar el término de la sumatoria en el lado derecho, resultando en

$$a_e u'_e = (p'_P - p'_E) A_e \quad (3.68)$$

o bien

$$u'_e = d_e (p'_P - p'_E) \quad (3.69)$$

donde

$$d_e = \frac{A_e}{a_e} \quad (3.70)$$

La ecuación (3.69) es entonces la ecuación de corrección de velocidad para  $u$ , que al sumar a la velocidad supuesta debería resultar en la velocidad real:

$$u_e = u_e^* + d_e (p'_P - p'_E) \quad (3.71)$$

Siguiendo el mismo procedimiento podemos llegar a una ecuación similar para la corrección de la velocidad  $v$ :

$$v_n = v_n^* + d_n (p'_P - p'_N) \quad (3.72)$$

Así se observa que la velocidad es corregida en base a las correcciones de presión para dar lugar a una velocidad correcta.

Ahora lo único que falta es obtener una ecuación para corregir la presión. Esta ecuación es obtenida a partir de la ecuación de continuidad en dos dimensiones que es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3.73)$$



Si integramos mediante diferencias centrales las derivadas espaciales y utilizamos el esquema implícito para la derivada temporal tendremos

$$\frac{(\rho_P - \rho_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(\rho u)_e - (\rho u)_w] \Delta y + [(\rho v)_n - (\rho v)_s] \Delta x = 0 \quad (3.74)$$

Ahora sustituimos las ecuaciones de  $u$  y  $v$  obtenidas anteriormente (Ecuación. (3.71) y (3.72). Después de esto y al simplificar el álgebra obtendremos la ecuación de corrección de presión siguiente:

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b \quad (3.75)$$

donde

$$a_E = \rho_e d_e \Delta y \quad (3.76a)$$

$$a_W = \rho_w d_w \Delta y \quad (3.76b)$$

$$a_N = \rho_n d_n \Delta x \quad (3.76c)$$

$$a_S = \rho_s d_s \Delta x \quad (3.76d)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (3.76e)$$

$$b = \frac{(\rho_P^0 - \rho_P) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(\rho u^*)_w - (\rho u^*)_e] \Delta y + [(\rho v^*)_s - (\rho v^*)_n] \Delta x \quad (3.76f)$$

Las densidades en la interfaz deben ser evaluadas mediante interpolación ya que solamente están disponibles en los nodos principales. Es importante mencionar que el término  $b$  en la ecuación (3.76f) es esencialmente el negativo de la ecuación de continuidad discretizada con la diferencia de que es evaluada con las velocidades supuestas ( $u^*$  y  $v^*$ ). Si  $b$  es cero significa que los valores de las velocidades junto con las densidades  $\rho_P$  y  $\rho_P^0$  satisfacen la ecuación de continuidad y por lo tanto ya no es necesario realizar la corrección de la presión. En otras palabras, el término  $b$  representa una fuente de masa que las correcciones sucesivas de presión y velocidades deben eliminar.

### 3.7.3. Algoritmo SIMPLE

Ya que se han definido las ecuaciones de corrección de presión y velocidades se desarrolla un algoritmo o serie de operaciones que realizadas en orden e iterativamente deben de conducir a una solución del campo de flujo. Este algoritmo es llamado SIMPLE por sus siglas en inglés (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*) y se define a continuación.

1. Definir un campo de presión inicial  $p^*$ .
2. Resolver las ecuaciones de cantidad de movimiento (3.67) y (3.64) para obtener  $u^*$  y  $v^*$ .
3. Resolver la ecuación de corrección de presión (3.75) para obtener  $p'$
4. Corregir la presión mediante la ecuación (3.65) añadiendo la corrección de presión a la presión inicial.
5. Calcular las velocidades  $u$  y  $v$  mediante las ecuaciones de corrección de velocidad (3.71) y (3.72)
6. Si existen otras variables  $\phi$  (tales como temperatura, turbulencia, etc.) que influyan en el campo de flujo mediante propiedades o términos fuente, se resuelven sus ecuaciones discretizadas. De otra manera es mejor dejar su cálculo para el final debido a que éstas están desacopladas.
7. Tomar el valor de la presión corregida como la nueva presión supuesta  $p^*$  y repetir el procedimiento completo a partir del paso 2 hasta que se alcance la convergencia.

### 3.8. Método de solución de las ecuaciones (TDMA)

Ya que se han establecido todos los procedimientos de discretización de las ecuaciones de gobierno debemos aplicar un método numérico para solucionar dichas ecuaciones. Hemos mencionado que el resultado de discretizar las ecuaciones diferenciales es un sistema de ecuaciones lineales con tantas incógnitas como puntos de la malla tengamos, de modo que si se tiene un dominio discreto con una malla muy fina se tendrán un sistema de ecuaciones tan grande que su solución a mano es prácticamente imposible.

Existen métodos de solución de ecuaciones lineales directos e iterativos. Para el caso de una dimensión es suficiente emplear un método directo como el de Thomas, también conocido como TDMA por sus siglas en inglés (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) en base a que el sistema de ecuaciones es de tres incógnitas por ecuación acomodándose en tres diagonales en forma matricial. La ecuación discretizada para una dimensión es de la forma

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + b \quad (3.77)$$

donde por el momento no nos interesa la forma de calcular los coeficientes  $a_E$ ,  $a_W$  y  $a_P$ , simplemente supondremos que los conocemos en base a propiedades físicas y parámetros geométricos conocidos. Recordemos que esta ecuación aplica para cada uno de los puntos de la malla, así que suponiendo que tenemos  $n$  nodos, tendremos igual número de ecuaciones.

Ahora cambiaremos un poco la nomenclatura sustituyendo los subíndices  $W$ ,  $P$  y  $E$  por  $i - 1$ ,  $i$  e  $i + 1$  respectivamente. Asimismo sustituimos los coeficientes  $a_W$  por  $\beta_i$ ,  $a_P$  por  $D_i$  y  $a_E$  por  $\alpha_i$ . De igual manera cambiamos el término independiente  $b$  por  $C_i$  y reagrupamos de la siguiente manera:

$$-\beta_i \phi_{i-1} + D_i \phi_i - \alpha_i \phi_{i+1} = C_i \quad (3.78)$$

Si aplicamos esto a todos los puntos obtendremos un sistema de ecuaciones como el siguiente

$$\begin{aligned}
 D_1\phi_1 - \alpha_1\phi_2 &= C_1 \\
 -\beta_2\phi_1 + D_2\phi_2 - \alpha_2\phi_3 &= C_2 \\
 -\beta_3\phi_2 + D_3\phi_3 - \alpha_3\phi_4 &= C_3 \\
 &\vdots \\
 -\beta_{n-1}\phi_{n-2} + D_{n-1}\phi_{n-1} - \alpha_{n-1}\phi_n &= C_{n-1} \\
 -\beta_n\phi_{n-1} + D_n\phi_n &= C_n
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Empezando por la ecuación para  $\phi_2$  y hasta  $\phi_{n-1}$  podemos despejar la variable en cuestión de la forma

$$\phi_2 = \frac{\alpha_2}{D_2}\phi_3 + \frac{\beta_2}{D_2}\phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \tag{3.80a}$$

$$\phi_3 = \frac{\alpha_3}{D_3}\phi_4 + \frac{\beta_3}{D_3}\phi_2 + \frac{C_3}{D_3} \tag{3.80b}$$

$$\vdots \tag{3.80c}$$

$$\phi_{n-1} = \frac{\alpha_{n-1}}{D_{n-1}}\phi_n + \frac{\beta_{n-1}}{D_{n-1}}\phi_{n-2} + \frac{C_{n-1}}{D_{n-1}} \tag{3.80d}$$

Observamos que  $\phi_2$  en la ecuación (3.80a) está en función de  $\phi_3$  y  $\phi_1$ , sin embargo éste último al ser valor de la frontera es conocido por lo que  $\phi_2$  solamente depende del valor de  $\phi_3$ . Si sustituimos la ecuación (3.80a) en (3.80b) para eliminar  $\phi_2$  tendremos

$$\phi_3 = \left( \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) \phi_4 + \left[ \frac{\beta_3 \left( \frac{\beta_2}{D_2} \phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \right) + C_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right] \tag{3.81}$$

Si introducimos dos nuevas variables  $A_i$  y  $C'_i$  definidas como

$$A_2 = \frac{\alpha_2}{D_2} \quad \text{y} \quad C'_2 = \frac{\beta_2}{D_2}\phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \tag{3.82}$$

en la ecuación (3.81) resulta que

$$\phi_3 = \left( \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \phi_4 + \left( \frac{\beta_3 C'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \quad (3.83)$$

De igual manera si definimos  $A_3$  y  $C'_3$  como

$$A_3 = \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \quad \text{y} \quad C'_3 = \frac{\beta_3 C'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \quad (3.84)$$

obtendremos que

$$\phi_3 = A_3 \phi_4 + C'_3 \quad (3.85)$$

que nos permite calcular  $\phi_3$  en función de  $\phi_4$ .

Si seguimos sustituyendo de esta manera en las ecuaciones subsecuentes llegaremos al punto de tener  $\phi_{n-1}$  en función de  $\phi_n$  que tiene un valor conocido al ser frontera. De esta manera podemos ir obteniendo los valores de todas las variables al sustituir el valor de  $\phi_{i+1}$  en la ecuación general

$$\phi_i = A_i \phi_{i+1} + C'_i \quad (3.86)$$

donde

$$A_i = \frac{\alpha_i}{D_i - \beta_i A_{i-1}} \quad (3.87)$$

y

$$C'_i = \frac{\beta_i C'_{i-1} + C_i}{D_i - \beta_i A_{i-1}} \quad (3.88)$$

En resumen, se van sustituyendo hacia adelante las variables  $\phi_{i-1}$  en la ecuación para  $\phi_i$  de tal manera que ésta quede sólo en función de  $\phi_{i+1}$ , así hasta llegar a la última ecuación

donde el valor de  $\phi_n$  es conocido y a partir de este valor se van calculando todas las  $\phi_i$  hacia atrás.

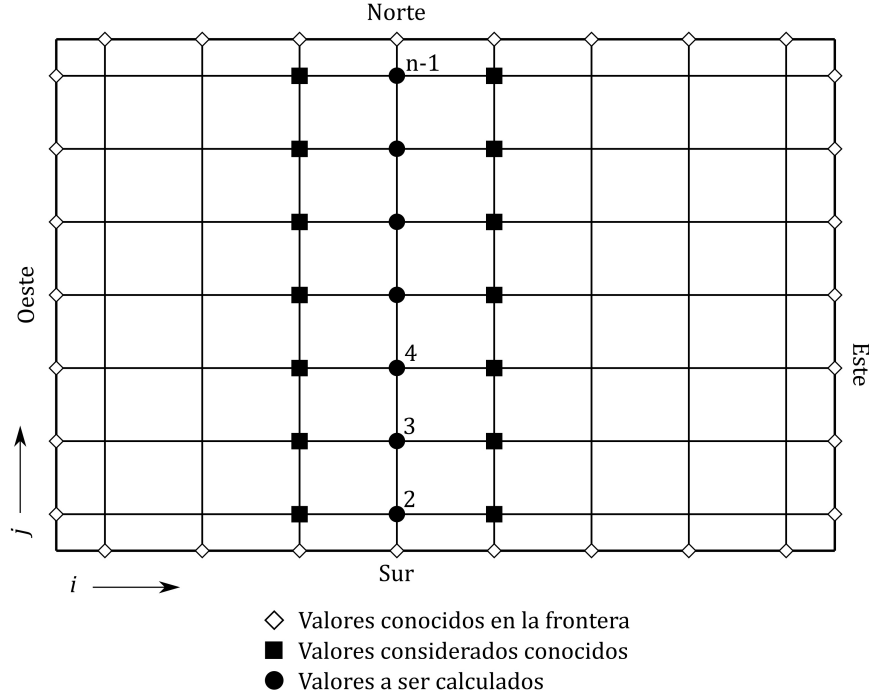
Este método es notablemente sencillo y no requiere demasiada memoria computacional para obtener la solución del sistema de ecuaciones. Lamentablemente solamente funciona para ecuaciones en una dimensión donde las incógnitas son el punto en cuestión y los vecinos a ambos lados. Si recordamos la ecuación discretizada en dos dimensiones posee la influencia de cuatro vecinos haciendo el sistema de ecuaciones de cinco incógnitas por ecuación, lo que representa una matriz pentadiagonal.

En este caso necesitaremos un método iterativo para la solución. El más sencillo de todos es el método de Gauss-Seidel y su principio es ir visitando los nodos uno por uno y calcular el valor de dicho nodo en función de valores supuestos (o de la iteración anterior) para todos los vecinos hasta completar todo el dominio. Una vez hecho esto se tienen actualizados los valores y empieza el procedimiento una vez más hasta alcanzar la solución. La desventaja de este método es que tarda mucho tiempo en alcanzar la convergencia por el hecho de visitar los nodos uno a uno. Lo ideal es combinar ambos métodos para aprovechar las ventajas de los dos, es por esto que para el caso de dos dimensiones en lugar de visitar nodo por nodo se hacen los cálculos línea por línea y dentro de cada una de ellas se resuelven las ecuaciones por el método TDMA.

Para la aplicación de dicho método debemos escoger en qué dirección deseamos resolver las líneas. Para obtener mejores resultados se recomienda resolver las líneas en el sentido de la corriente, es decir si  $u > 0$  se resolverían las líneas de *sur* a *norte* una por una de *oeste* a *este*, como se muestra en la Figura 3.11.

Si tomamos en cuenta esta estrategia de solución, tendríamos que suponer como conocidos los valores de  $\phi_W$  y  $\phi_E$  de manera que la ecuación discretizada quedaría como

$$-\beta_i \phi_{i-1} + D_i \phi_i - \alpha_i \phi_{i+1} = C_j \quad (3.89)$$



**Figura 3.11:** Aplicación del método TDMA línea por línea en dos dimensiones.

donde, de acuerdo con la nomenclatura antes definida:

$$\alpha_i = a_N \quad (3.90a)$$

$$\beta_i = a_S \quad (3.90b)$$

$$D_i = a_P \quad (3.90c)$$

$$C_i = a_W \phi_W + a_E \phi_E + b \quad (3.90d)$$

Ahora se pueden resolver las líneas en la dirección  $s - n$  empezando por la segunda (debido a que la primera es frontera y los valores de  $\phi_1$  son conocidos) y subsecuentemente resolver las demás líneas. Si barremos las líneas de oeste a este, como se ha mencionado, los valores de  $\phi_W$  son conocidos del cálculo de la línea anterior mientras que los valores de  $\phi_E$  son desconocidos por lo que la solución debe ser iterativa. Los valores de  $\phi_E$  tomados para el cálculo provienen de la iteración anterior o de un valor inicial supuesto.

Una vez barridas todas las líneas del dominio se repite el procedimiento hasta alcanzar la convergencia.



## CAPÍTULO

### 4

# METODOLOGÍA

Debido al hecho de que no se encontraron trabajos en la literatura que realizaran el estudio del flujo de aire húmedo alrededor de un cilindro con crecimiento de escarcha, es necesario primeramente hacer la validación de la metodología propuesta en coordenadas rectangulares. Una vez realizada la validación se procede a aplicar dicha metodología a las coordenadas cilíndricas.

### **4.1. Fases y componentes del sistema**

El sistema que se pretende resolver consta de dos fases: la fase gaseosa (aire húmedo) y la fase sólida (hielo o escarcha). A su vez la fase gaseosa está compuesta por dos compo-

nentes: el aire seco y la humedad (vapor de agua). Una vez que se ha formado la escarcha, el medio estudiado pasa a ser un medio poroso en las regiones donde exista la fase sólida. Debido a esto es necesario considerar el efecto de la fracción de volumen de cada fase en las ecuaciones de gobierno, así como en las propiedades termofísicas del medio.

## 4.2. Modelo matemático

Se hizo la selección del modelo matemático en base al modelo propuesto por Cui en 2011[19] el cual contiene ecuaciones de gobierno para la fracción de volumen del sólido, ecuación de continuidad, conservación de cantidad de movimiento, energía y materia para la fracción másica del vapor de agua en el aire.

### 4.2.1. Fracción de volumen

Primeramente es necesario introducir una propiedad llamada *fracción de volumen* ( $\alpha$ ) para cada fase, de tal manera que para el sólido,  $\alpha_s$  tomará valores desde 0 (no se ha formado nada de escarcha) hasta 1 (totalmente hielo). La ecuación que gobierna la fracción de volumen de sólido contiene un término temporal, un término difusivo y un término fuente. La fracción de volumen de sólido se calcula con el complemento, ya que la suma de ambas fracciones debe ser igual a la unidad.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s) + \nabla \cdot (\alpha_s \vec{u}_s) = S_{\alpha_s} \quad (4.1)$$

$$\alpha_g = 1 - \alpha_s \quad (4.2)$$

### 4.2.2. Campo de flujo

Posteriormente, se requiere resolver el campo de flujo de la fase gaseosa mediante la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Navier-Stokes, ambas modificadas para tomar en cuenta la fracción de volumen de dicha fase.

#### Continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \vec{u}_g) = S_{mg} \quad (4.3)$$

#### Conservación de cantidad de movimiento

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g \vec{u}_g) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \vec{u}_g \vec{u}_g) = -\alpha_g \nabla p + \nabla \cdot (\alpha_g \mu_g \nabla \vec{u}_g) + S_{ug} \quad (4.4)$$

### 4.2.3. Conservación de la energía

Con el fin de conocer el campo de temperaturas dentro del dominio se requiere resolver la ecuación de conservación de energía. Esto es importante ya que la escarcha sólo se formará en regiones con una temperatura por debajo al punto de solidificación del agua. Esta ecuación también está influenciada por la fracción de volumen del gas, además se introduce una conductividad térmica efectiva para tomar en cuenta la influencia de la escarcha en dicha propiedad.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g h_g) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \vec{u}_g h_g) = \nabla \cdot (\alpha_g k_{eff} \nabla T_g) + S_{hg} \quad (4.5)$$

$$k_{eff} = \alpha_g k_g + \alpha_s k_s \quad (4.6)$$

#### 4.2.4. Conservación de especies

Debido a que el vapor de agua contenido en la fase gaseosa se solidifica para formar la escarcha, es necesario cuantificar la cantidad de humedad en el aire. Esto se logra resolviendo la ecuación de conservación de especies para dicho componente (Ecuación 4.7). La fracción másica del aire se calcula tomando en cuenta que la suma de las fracciones de ambas fases debe ser igual a la unidad (Ecuación 4.9).

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g Y_{g,v}) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \vec{u}_g Y_{g,v}) = \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g D_{eff} \nabla Y_{g,v}) + S_{Y_{g,v}} \quad (4.7)$$

donde, según Lenic [24], la difusividad efectiva se calcula como

$$D_{eff} = D_{vg} \cdot \alpha_g \cdot \frac{1 + \alpha_g}{2} \quad (4.8)$$

$$Y_{g,a} = 1 - Y_{g,v} \quad (4.9)$$

### 4.3. Propiedades

Las propiedades termofísicas tales como densidad, viscosidad, conductividad térmica y difusividad másica del medio son muy importantes para la solución. En la mayoría de los estudios se hace la suposición de que las propiedades son constantes a lo largo del dominio y del tiempo. En nuestro caso se incluye la variación de las propiedades en función la temperatura local, así como de la fracción de volumen de sólido. Se recolectaron datos de propiedades a diferentes temperaturas disponibles en la literatura [44, 45, 46, 47, 48] y se ajustaron a un polinomio mediante una regresión polinomial. Las ecuaciones (4.10) a (4.12) muestran los modelos utilizados para cada fase, donde  $\phi$  representa cualquier propiedad aplicable a dicha fase, mientras que los Cuadros 4.1, 4.2 y 4.3 contienen los valores

de los coeficientes resultantes del ajuste polinomial para cada componente, respectivamente.

$$\phi_{aire\ seco} = a + bT + cT^2 + dT^3 \quad (4.10)$$

**Cuadro 4.1:** Valores de los coeficientes del ajuste polinomial para las propiedades del aire seco.

$\phi$	$a$	$b$	$c$	$d$
$\rho [kg/m^3]$	5.3858	$-30.6125 \times 10^{-3}$	$7.6820 \times 10^{-5}$	$-7.1820 \times 10^{-8}$
$c [J/kg \cdot K]$	560.4409	4.4858	$-15.0524 \times 10^{-3}$	$1.6860 \times 10^{-5}$
$k [W/m \cdot K]$	$12.4490 \times 10^{-4}$	$8.7570 \times 10^{-5}$	$-1.7860 \times 10^{-8}$	$-9.6770 \times 10^{-12}$
$\mu [kg/m \cdot s]$	$1.4200 \times 10^{-7}$	$7.8900 \times 10^{-8}$	$-6.6830 \times 10^{-11}$	$2.8800 \times 10^{-14}$

$$\phi_{humedad} = a + bT + cT^2 \quad (4.11)$$

**Cuadro 4.2:** Valores de los coeficientes del ajuste polinomial para las propiedades del vapor de agua.

$\phi$	$a$	$b$	$c$
$\rho [kg/m^3]$	2.4667	$-9.1308 \times 10^{-3}$	$1.1140 \times 10^{-5}$
$c [J/kg \cdot K]$	2264.9100	-2.7422	$4.8000 \times 10^{-3}$
$k [W/m \cdot K]$	$40.0280 \times 10^{-4}$	$2.5290 \times 10^{-5}$	$7.8000 \times 10^{-8}$
$\mu [kg/m \cdot s]$	$-3.756 \times 10^{-8}$	$2.9920 \times 10^{-8}$	$1.1000 \times 10^{-11}$

$$\phi_{hielo} = a + bT + cT^2 \quad (4.12)$$

Debido a que el aire seco, el vapor de agua y el hielo tienen propiedades diferentes es necesario aplicar un modelo que permita observar el efecto de la cantidad de cada compuesto presente en el medio. El modelo más adecuado para representar este efecto es una suma ponderada, de esta manera si la fracción de sólido es muy grande, las propiedades

**Cuadro 4.3:** Valores de los coeficientes del ajuste polinomial para las propiedades del hielo.

$\phi$	$a$	$b$	$c$
$\rho [kg/m^3]$	930.0280	$31.5750 \times 10^{-3}$	$-2.5000 \times 10^{-4}$
$c [J/kg \cdot K]$	-165.0290	11.5577	$-13.125 \times 10^{-3}$
$k [W/m \cdot K]$	11.3620	$-64.0772 \times 10^{-3}$	$10.7500 \times 10^{-5}$

serán más parecidas a las del hielo, mientras que si es pequeña se parecerán más a las del gas. Esto se encuentra representado mediante las ecuaciones (4.13) y (4.14)

$$\phi_{aire\ humedo} = Y_{humedad} * \phi_{humedad} + Y_{aire\ seco} * \phi_{aire\ seco} \quad (4.13)$$

$$\phi_{escarcha} = \alpha_g * \phi_{aire\ humedo} + \alpha_s * \phi_{hielo} \quad (4.14)$$

La única propiedad que no se ajustó a un polinomio fue la difusividad másica del vapor de agua en el aire debido a que las propiedades tales como viscosidad y conductividad térmica son sólo funciones de la presión y temperatura, mientras que la difusividad másica también depende de la composición. Combinando los principios de la teoría cinética y de los estados correspondientes Slattery y Bird en 1958 publicaron la siguiente ecuación para estimar la difusividad másica a bajas presiones [49]:

$$\frac{pD_{AB}}{(p_{cA}p_{cB})^{1/3} (T_{cA}T_{cB})^{5/12} \left(\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}\right)^{1/2}} = a \left( \frac{T}{\sqrt{T_{cA}T_{cB}}} \right)^b \quad (4.15)$$

donde  $D_{AB}$  es la difusividad másica del vapor de agua en el aire en  $cm^2/s$ ,  $p$  es la presión absoluta en  $atm$  y  $T$  es la temperatura en  $K$ . Los subíndices  $A$  y  $B$  representan a los compuestos de la fase gaseosa, vapor de agua y aire seco respectivamente,  $T_c$  y  $p_c$  son las constantes de temperatura y presión críticas respectivamente, mientras que  $M$  es el peso molecular (Cuadro 4.4). Las constantes  $a$  y  $b$  se calculan mediante el análisis de los datos

experimentales y los valores obtenidos por Bird para mezclas de vapor de agua y gases no polares, como el aire, son  $a = 3.640 \times 10^{-4}$  y  $b = 2.334$ .

**Cuadro 4.4:** Pesos moleculares y constantes críticas para el cálculo de la difusividad másica

	$M [g/mol]$	$T_c [K]$	$P_c [atm]$
Vapor de agua	18.015	647.1	217.68
Aire	28.851	132.2	36.96

## 4.4. Diseño de experimentos

Se llevaron a cabo cuatro simulaciones tanto en coordenadas rectangulares como en cilíndricas variando únicamente la velocidad de entrada de aire y su contenido de humedad. El Cuadro 4.5 presenta la matriz de los casos de estudio analizados. Las fracciones másicas de vapor de agua se calcularon en base al grado de humedad relativa, tomando los valores de 1 (aire saturado de humedad) y 1.25 (aire supersaturado de humedad).

**Cuadro 4.5:** Matriz de casos de estudio analizados.

Clave	$u_{in} [m/s]$	$Y_{in} [-]$	$T_s [^{\circ}C]$	$T_{in} [^{\circ}C]$
u1h1	0.005	0.014533	-20	5
u1h2	0.005	0.018206	-20	5
u2h1	0.01	0.014533	-20	5
u2h2	0.01	0.018206	-20	5

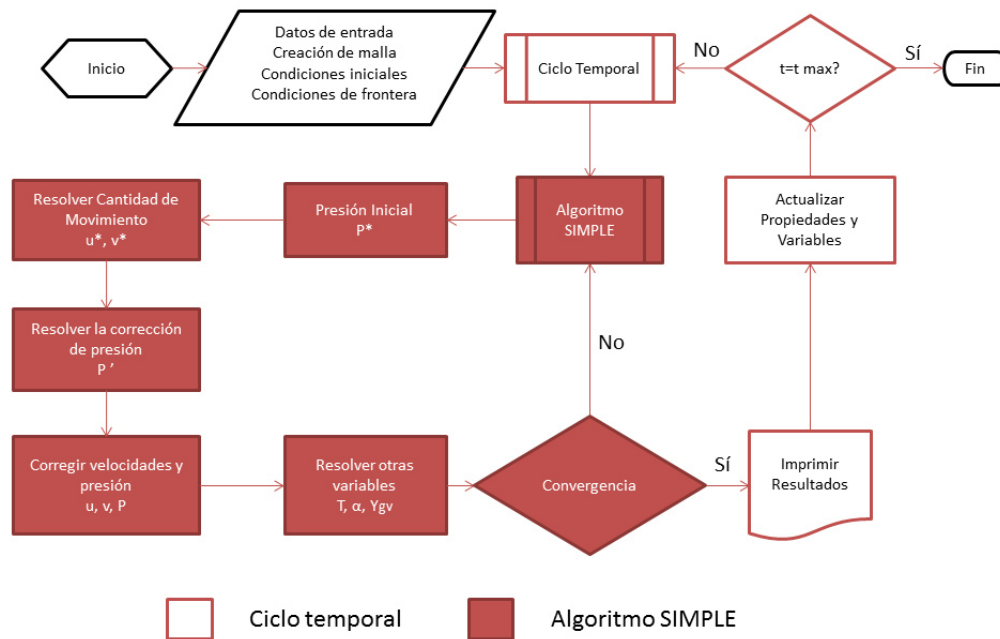
## 4.5. Código numérico

A continuación se describe el algoritmo de solución del método numérico (Figura 4.1) utilizado para resolver el modelo matemático .

1. Primeramente se leen los parámetros de entrada tales como las dimensiones del dominio, tamaño de la malla, propiedades físicas, condiciones iniciales y de frontera, etc.
2. Con estos datos se procede a generar la malla tomando en cuenta que debe ser fina en áreas donde haya cambios importantes en las propiedades.
3. Una vez definido el dominio discreto se imprimen las condiciones iniciales y se procede a entrar al ciclo temporal donde se varía el tiempo de manera discreta tomando en cuenta la velocidad de variación del fenómeno para decidir el tamaño del paso de tiempo.
4. Mientras el tiempo actual sea menor al tiempo final se ejecuta el algoritmo SIMPLE
5. Se supone una presión inicial (valor de la iteración anterior), a partir de la cual se calcula una aproximación del campo de velocidades.
6. Tomando estas velocidades aproximadas se calcula una presión corregida.
7. Con la presión corregida se corrigen la presión inicial y las velocidades aproximadas para obtener los valores correctos.
8. El campo de velocidades obtenido se utiliza para resolver las demás ecuaciones de variación tales como la energía, materia, componentes y fracción volumen.
9. Una vez obtenidas todas las variables se calculan las propiedades físicas en función de temperaturas y fracciones volumétricas.



10. Se verifica que los residuales de todas las ecuaciones sean menor al criterio de convergencia, de no ser así se vuelven a repetir los pasos 5 a 10.
11. De cumplirse el criterio de convergencia se imprimen los resultados y se procede al siguiente paso de tiempo repitiendo los pasos 4 a 11 hasta llegar al tiempo final.



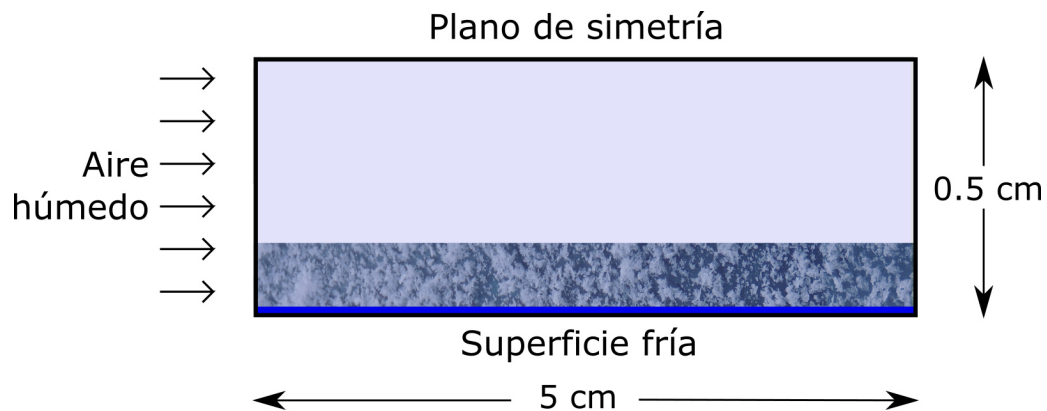
**Figura 4.1:** Diagrama de flujo del algoritmo de solución

## 4.6. Validación del método en coordenadas rectangulares.

### 4.6.1. Definición del problema

El problema consiste en el flujo de aire con velocidad, temperatura y humedad constante entrando por el espacio entre dos placas planas. Dichas placas se encuentran separadas

por una distancia de  $1\text{ cm}$  con una longitud de  $5\text{ cm}$ , correspondientes a las dimensiones típicas de las aletas en un evaporador de refrigerador comercial. Con el fin de simplificar el problema se considera solamente la mitad del espacio entre las dos placas ( $0.5\text{ cm}$ ), de manera que la frontera superior es un plano de simetría y la placa inferior corresponde a la superficie fría de una aleta del evaporador, sobre la cual se depositará la humedad al alcanzar su punto de congelación para formar la escarcha, como se muestra en la Figura 4.2



**Figura 4.2:** Esquema de la geometría propuesta para coordenadas rectangulares.

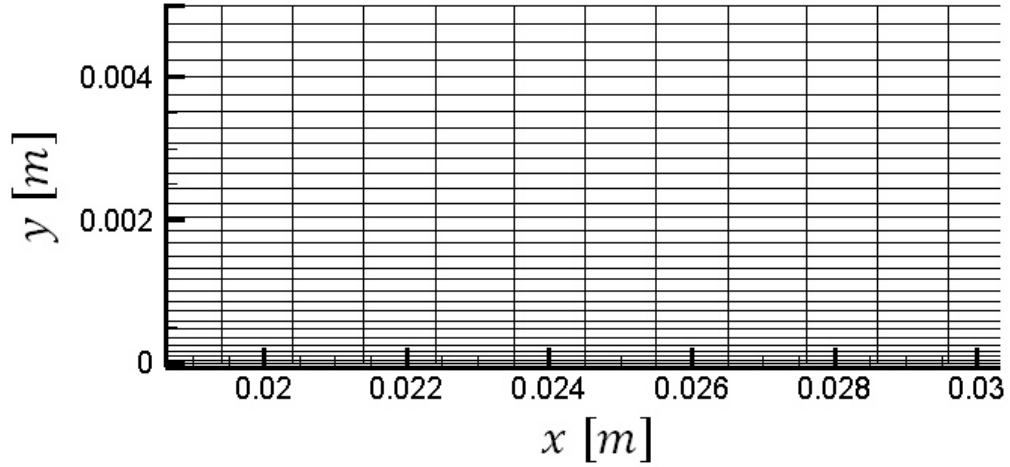
#### 4.6.2. Dominio y discretización

La malla utilizada para el dominio discreto es de tipo homogénea (Ecuación 4.16 en un ciclo desde  $i = 1$  hasta  $i = n$ ) con 50 elementos en la dirección  $x$  creando elementos del mismo tamaño, mientras que en la dirección  $y$  se eligió una discretización de tipo exponencial (Ecuación 4.17 en un ciclo desde  $j = 1$  hasta  $j = m$ ) con 30 elementos, lo que produce una malla fina cerca de la pared fría y sus elementos crecen a medida que se alejan de la superficie. De esta manera se pueden observar los fenómenos de capa límite en las cercanías de la pared con suficiente detalle. Debido a la relación tan grande entre la longitud y la altura del dominio, en la Figura 4.3 se muestra sólo una porción de la

longitud de la malla.

$$x_i = \left( \frac{i-1}{n-1} \right) Lx \quad (4.16)$$

$$y_j = \left( \frac{j-1}{m-1} \right)^{1.5} Ly \quad (4.17)$$



**Figura 4.3:** Porción de la malla empleada para el estudio numérico.

#### 4.6.3. Condiciones iniciales y de frontera

Las ecuaciones definidas en la sección 4.2 están sujetas a condiciones iniciales y de frontera para su correcta solución.

Inicialmente el dominio se encuentra lleno de aire estático (velocidad nula), una temperatura inicial de  $5^{\circ}\text{C}$  y una humedad equivalente a la humedad de entrada (Definida en la Sección 4.4 ). La fracción de volumen es inicialmente cero en todo el dominio y las propiedades del aire húmedo se calculan en base a la temperatura inicial.

En cuanto a las condiciones de frontera, las fronteras izquierda y derecha son entrada y salida de flujo de aire, respectivamente. La frontera inferior corresponde a la superficie fría del evaporador mientras que la frontera superior corresponde a un plano de simetría. A continuación se detallan dichas condiciones y se muestran también en la Figura 4.4.

**Izquierda:** Condición de velocidad de entrada de aire con temperatura y humedad constantes.

$$u = u_{in}, v = 0, T = T_{in}, \alpha_s = 0, Y_{g,v} = Y_{in}$$

**Derecha:** Condición de salida de flujo; la variación de todas las propiedades con respecto a la normal se considera cero, lo que significa que la frontera está tan lejos del fenómeno que las variables ya no cambian en esa dirección.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \frac{\partial \alpha_s}{\partial x} = 0, \frac{\partial Y_{g,v}}{\partial x} = 0$$

**Inferior:** Pared con temperatura constante, condición de no deslizamiento para las velocidades y cambios en la fracción másica de vapor de agua y en la fracción de volumen de hielo con respecto a la normal igual a cero.

$$u = 0, v = 0, T = T_s, \frac{\partial \alpha_s}{\partial y} = 0, \frac{\partial Y_{g,v}}{\partial y} = 0$$

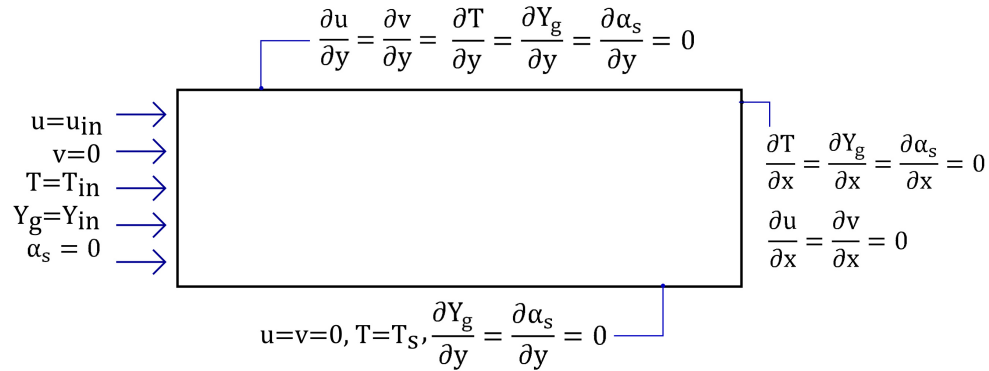
**Superior:** Plano de simetría; la variación de todas las propiedades con respecto a la normal se consideran cero, lo que significa que no impactan en el flujo corriente arriba.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \frac{\partial \alpha_s}{\partial y} = 0, \frac{\partial Y_{g,v}}{\partial y} = 0$$

## 4.7. Simulación numérica en coordenadas cilíndricas

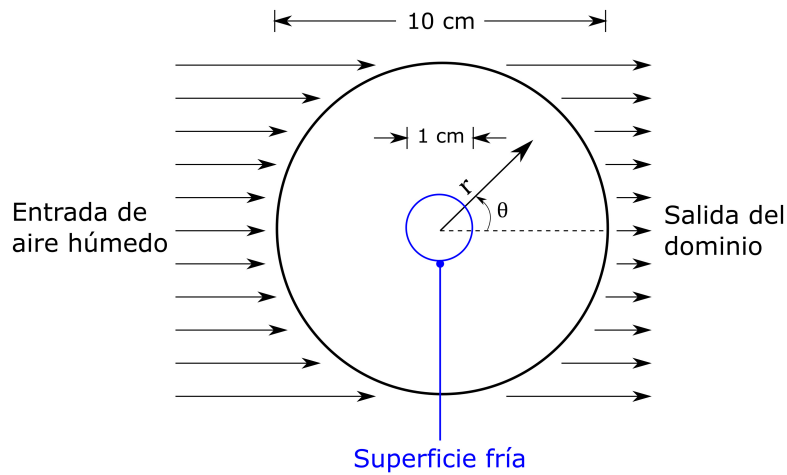
### 4.7.1. Definición del problema

El problema consiste en el flujo de aire alrededor de un cilindro circular de 1 cm de diámetro, como la geometría típica de un tubo de un evaporador de refrigerador comercial,



**Figura 4.4:** Dibujo esquemático de las condiciones de frontera para coordenadas rectangulares.

visto de manera transversal. Por el lado izquierdo del dominio se tiene una entrada de aire con velocidad, temperatura y humedad constantes, mientras que por el lado derecho se encuentra la salida del dominio. Por otro lado, el cilindro interior corresponde a la superficie fría del evaporador. El espacio que rodea al cilindro interno tiene un diámetro de 10 cm, en el cual se hace fluir aire con cierta velocidad, temperatura y humedad constantes, como se muestra en la Figura 4.5.



**Figura 4.5:** Esquema de la geometría propuesta para coordenadas cilíndricas.

### 4.7.2. Dominio y discretización

La malla utilizada para el dominio discreto es de tipo homogénea con 100 elementos en la dirección tangencial, similar a la utilizada para coordenadas rectangulares, con la diferencia de que la longitud  $L_x$  se reemplaza por la circunferencia,  $2\pi r$  (Ecuación 4.18). Por otro lado, para la dirección radial se optó por una malla tipo exponencial con 80 elementos, tomando en cuenta, no el diámetro total del dominio, sino el espacio entre el cilindro interno y el dominio externo, como se muestra en la Ecuación (4.19), produciendo una malla más fina cerca de la superficie fría permitiendo observar el fenómeno de la capa límite. La Figura 4.6 muestra dicha malla. Se observa una discontinuidad del lado derecho debida a que la malla se hace originalmente como si fuera rectangular y posteriormente se “dobla” alrededor del cilindro interno. Esa discontinuidad se resuelve en el método numérico haciendo que la primera y última líneas de nodos se comuniquen entre sí de manera que, la malla se cierre igual que el dominio continuo.

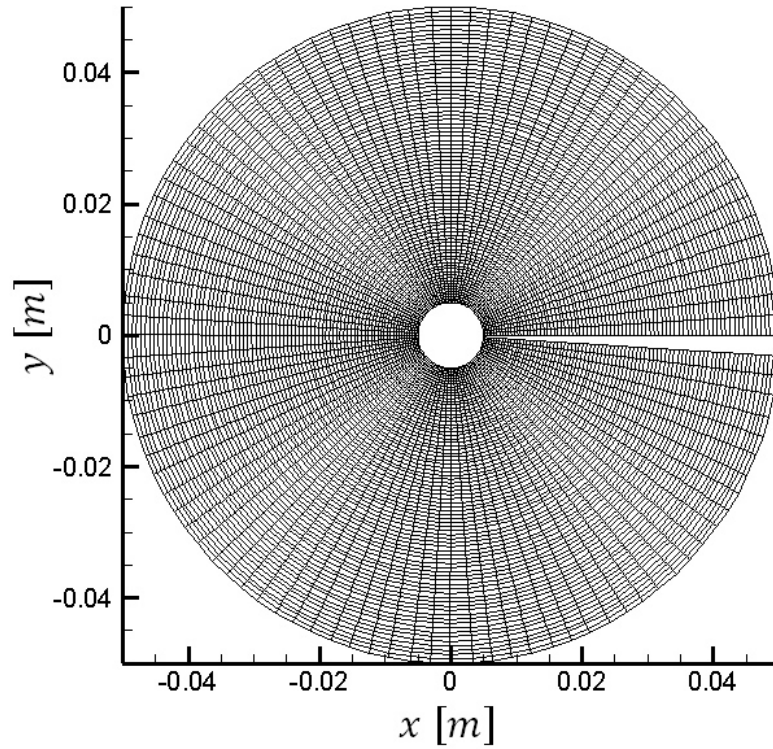
$$\theta_i = \left( \frac{i-1}{n-1} \right) 2\pi \quad (4.18)$$

$$r_j = \left( \frac{j-1}{m-1} \right)^{1.2} (R_{ext} - R_{int}) + R_{int} \quad (4.19)$$

### 4.7.3. Condiciones iniciales y de frontera

Inicialmente el dominio se encuentra lleno de aire estático (velocidad nula), una temperatura inicial de  $5^\circ C$  y una humedad equivalente a la humedad de entrada (definida en la Sección 4.4 ). La fracción de volumen es inicialmente cero en todo el dominio y las propiedades del aire húmedo se calculan en base a la temperatura inicial.

En cuanto a las condiciones de frontera, la parte izquierda del dominio se considera como frontera de entrada, mientras que la parte derecha es la frontera de salida. Por otro



**Figura 4.6:** Malla cilíndrica empleada para el estudio numérico.

lado el cilindro interior corresponde a la superficie fría del evaporador. A continuación se detallan dichas condiciones y se muestran también en la Figura 4.7.

**Izquierda:** Condición de velocidad de entrada de aire con temperatura y humedad constantes.

$$u_{\theta} = -u_{in} \sin \theta, u_r = u_{in} \cos \theta, T = T_{in}, \alpha_s = 0, Y_{g,v} = Y_{in}$$

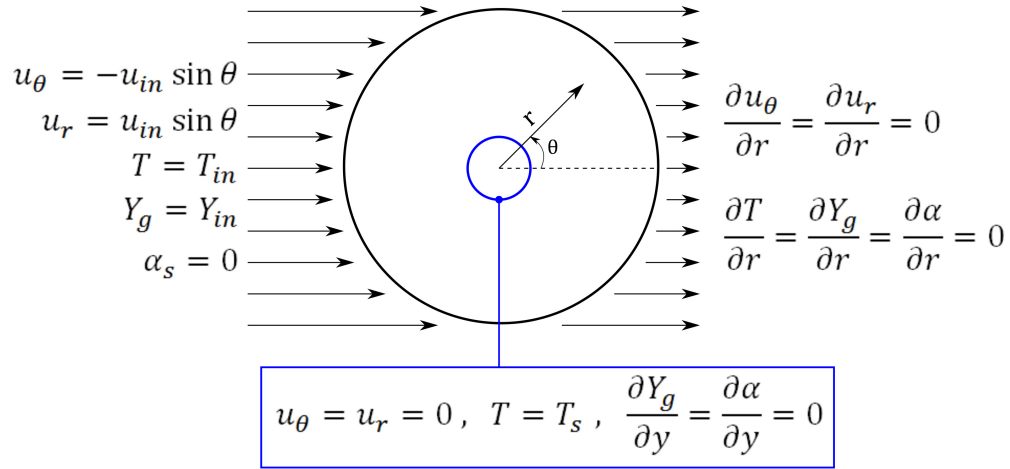
**Derecha:** Condición de salida de flujo; la variación de todas las propiedades con respecto a la normal se considera cero, lo que significa que la frontera está tan lejos del fenómeno que las variables ya no cambian en esa dirección.

$$\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} = 0, \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0, \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \frac{\partial \alpha_s}{\partial r} = 0, \frac{\partial Y_{g,v}}{\partial r} = 0$$

**Interior:** Pared con temperatura constante, condición de no deslizamiento para las veloci-

dades y cambios en la fracción másica de vapor de agua y en la fracción de volumen de hielo con respecto a la normal igual a cero.

$$u_\theta = 0, u_r = 0, T = T_s, \frac{\partial \alpha_s}{\partial r} = 0, \frac{\partial Y_{g,v}}{\partial r} = 0$$



**Figura 4.7:** Dibujo esquemático de las condiciones de frontera para coordenadas cilíndricas .



## CAPÍTULO

### 5

# RESULTADOS Y VALIDACIÓN DEL CÓDIGO

### **5.1. Validación en coordenadas rectangulares.**

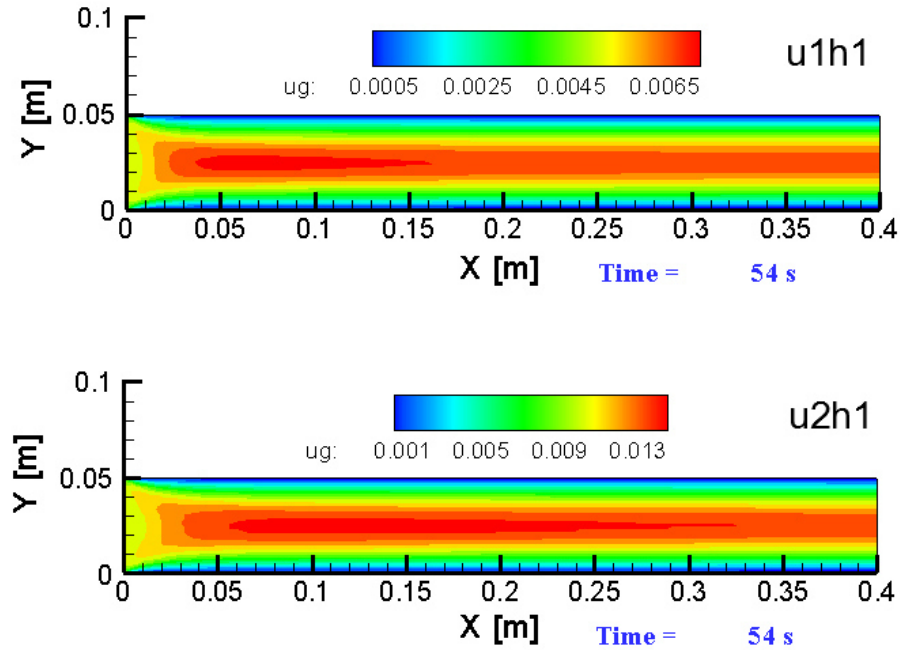
Con el fin de validar la metodología utilizada y asegurarse de que el código numérico entrega resultados consistentes se obtuvieron soluciones numéricas para el problema de las placas planas, en coordenadas rectangulares. Los resultados obtenidos se compararon con aquellos de la literatura.

Como se mencionó en la sección 4.4, se llevaron a cabo cuatro soluciones numéricas con velocidades y fracciones máscas de vapor de agua diferentes. A continuación

se presentan algunos resultados, y se revisan las diferencias más significativas entre los resultados.

### 5.1.1. Campo de velocidades

Para el caso de la distribución de velocidades, se presentan resultados comparativos entre las dos diferentes velocidades estudiadas; los efectos de la humedad de entrada resultaron ser poco significativos para el campo de velocidades. Se puede observar claramente que las distribuciones de la velocidad son idénticas para ambos casos donde la única diferencia observable es el valor máximo (Figura 5.1). Estos resultados presentados corresponden a un dominio como propuesto por el estudio de Cui en 2011 [19]. Para el caso de interés de este estudio el dominio consiste en el definido en la sección 4.6.



**Figura 5.1:** Comparación del campo de velocidades entre  $u1h1$  y  $u2h1$  para  $t = 54$  s

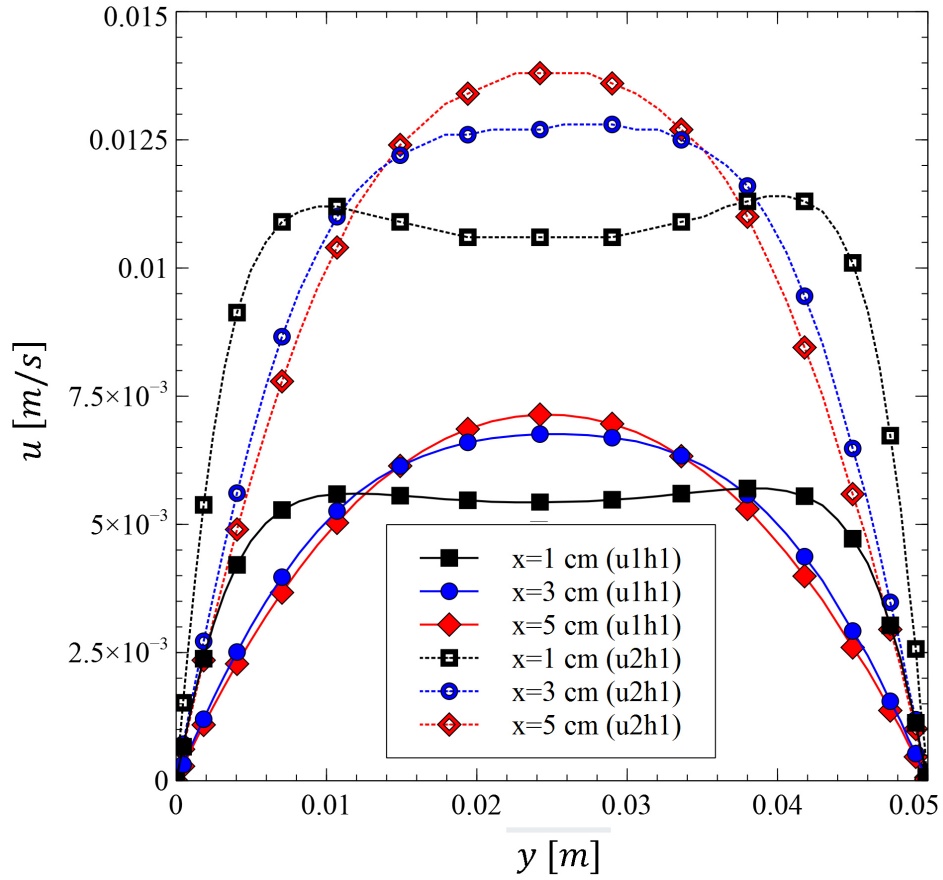
En la figura 5.2 se presentan los perfiles de velocidad extraídos de los mismos resul-

tados. Se grafica en el eje horizontal la altura del canal  $y$ , mientras que en el eje vertical se grafica la velocidad local,  $u$ , esto para tres diferentes valores de  $x$  para cada una de las condiciones a comparar. Se observa claramente que al aumentar la velocidad, los perfiles son más alargados, aunque con la misma tendencia. A  $x = 1\text{ cm}$  se observa que el flujo apenas se está empezando a desarrollar y se nota una velocidad muy baja cerca de las paredes mientras que en el centro la velocidad permanece básicamente constante. Conforme se avanza a lo largo del canal es notable el desarrollo del perfil parabólico típico de un flujo de Poiseuille entre dos placas planas. A  $x = 5\text{ cm}$  se observa que el perfil cambia muy poco respecto a  $x = 3\text{ cm}$  por lo que se considera que el flujo ya está desarrollado.

### 5.1.2. Distribución de temperatura

La distribución de temperaturas se muestra en la Figura 5.3 . Se compararon las distribuciones de temperatura correspondientes a las condiciones  $u1h1$  y  $u2h1$  debido a que los efectos más significativos son los de la convección debida al movimiento del fluido. Podemos observar que, al no variar las temperaturas entre los casos estudiados, los valores máximo y mínimo de temperatura son idénticos para ambas condiciones, lo único que cambia es la forma de la distribución, siendo más elongada para el caso  $u2h1$ , debido al efecto convectivo del fluido.

En la Figura 5.4 se muestran los perfiles de temperatura en la dirección transversal al flujo. En el eje horizontal se encuentra graficada la altura  $y$ , mientras que en el eje vertical se grafica la temperatura local,  $T$ , para diferentes valores de  $x$ . Si nos enfocamos solamente en la condición  $u1h1$ , se observa que a medida que el flujo avanza dentro del canal, la temperatura promedio del aire disminuye, esto debido a la transferencia de calor que ocurre hacia la placa fría, en pocas palabras, el aire pierde energía térmica al fluir por encima de la placa y como consecuencia su temperatura disminuye. Comparando los resultados entre las dos condiciones distintas observamos que a medida que el flujo se aleja

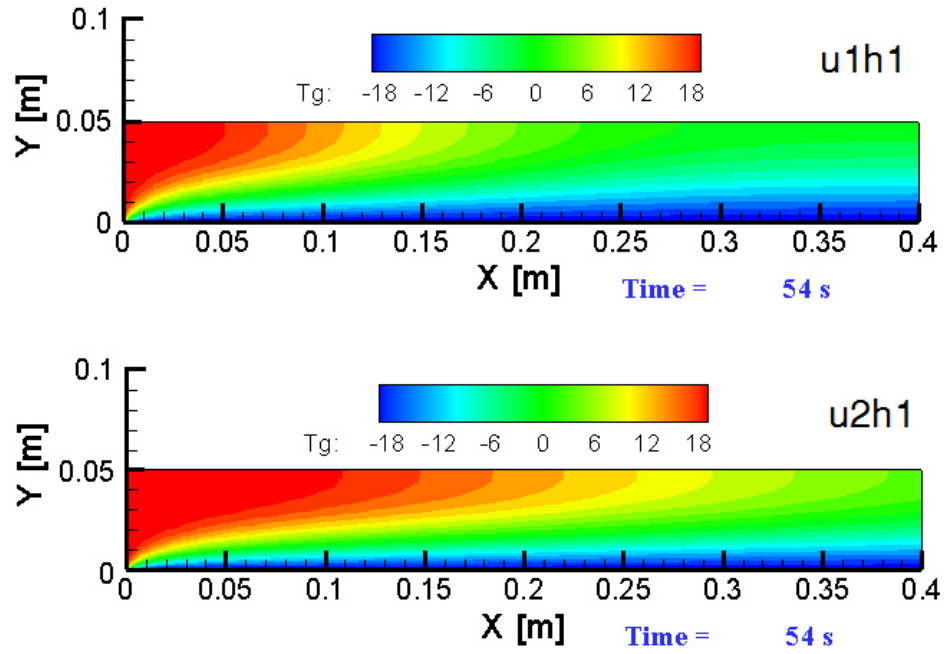


**Figura 5.2:** Comparación de los perfiles de velocidad entre  $u1h1$  y  $u2h1$  para diferentes valores de  $x$  para  $t = 54$  s

de la entrada, los perfiles de temperatura tienden a separarse cada vez más, esto es debido al efecto convectivo del aire; una mayor velocidad del aire implica una mayor convección (la cual domina sobre la conducción de calor hacia la pared), haciendo que la temperatura de entrada del aire se conserve durante más tiempo y por una longitud mayor.

### 5.1.3. Fracción de volumen de sólido

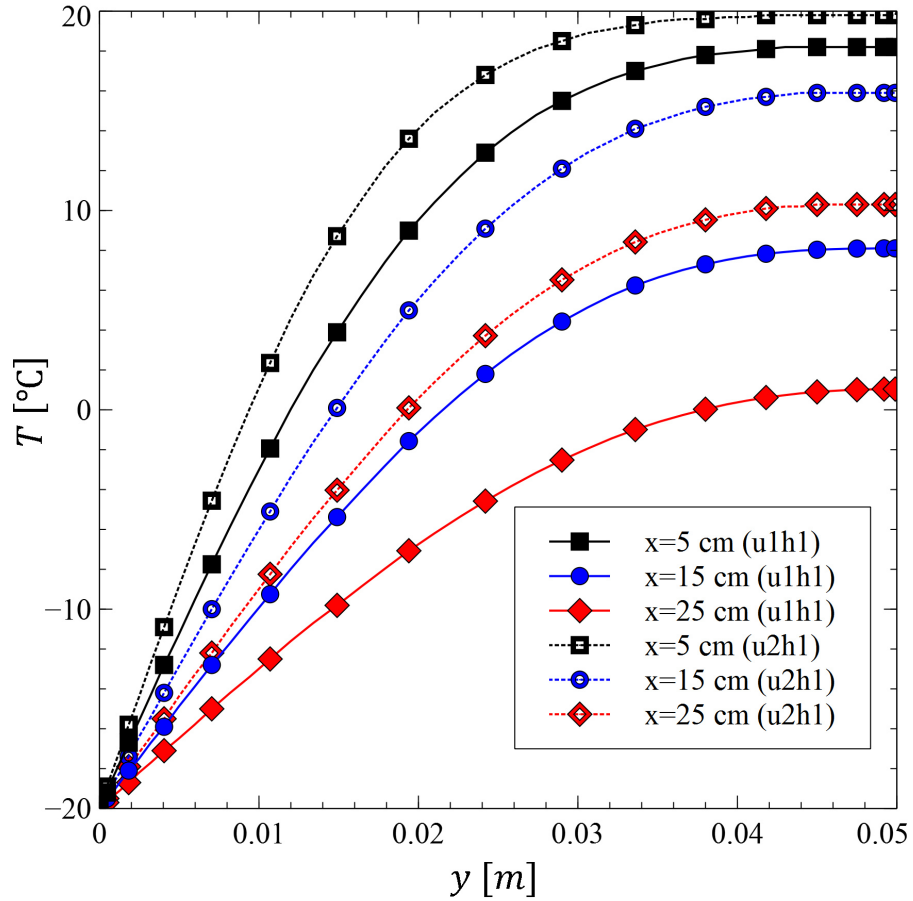
Por último, podemos observar las distribuciones de fracción de volumen de sólido para los casos de estudio  $u1h1$  y  $u2h2$  (Figura 5.5). Se observa que para una fracción másica



**Figura 5.3:** Comparación de la distribución de temperaturas entre u1h1 y u2h1 para  $t = 54$  s

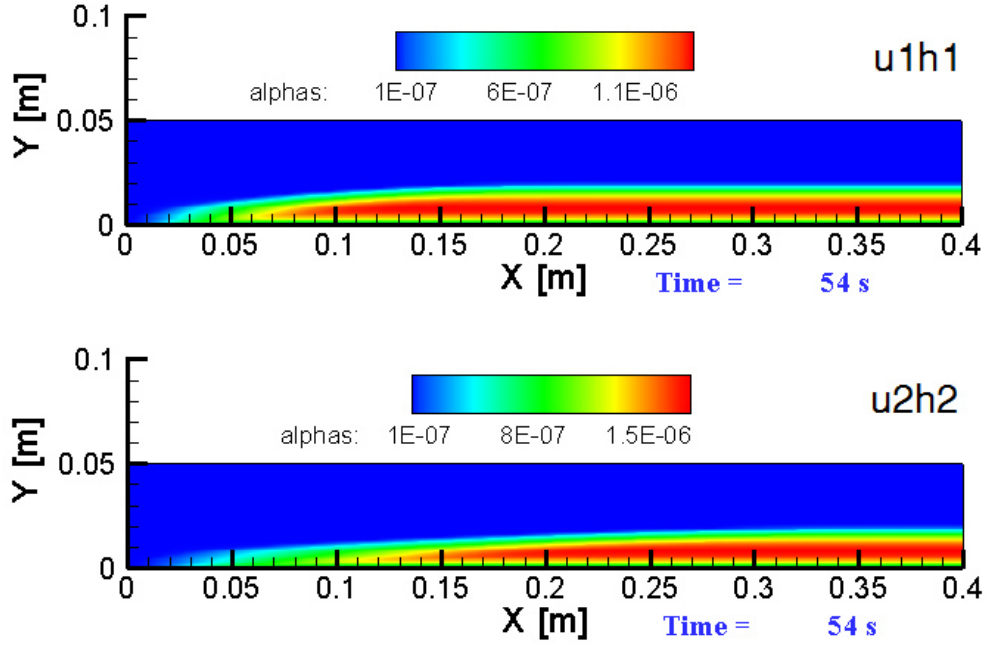
de entrada mayor se obtiene una fracción de volumen de hielo mayor, esto se debe a que se tiene más humedad disponible para ser depositada en la superficie del cilindro. Por otro lado, el efecto de la velocidad del flujo se refleja en la forma de la capa de escarcha, ocurriendo que a mayor velocidad, la capa de escarcha es más delgada. Esto se debe a que a mayor velocidad, la humedad tiene menos tiempo de residencia en el canal, haciendo que la velocidad de deposición de escarcha sea más lenta. Por otro lado, algunas de las gotas de hielo que se forman en el aire, y que aún no han estado en contacto con el hielo, son más propensas a ser transportadas por convección en la corriente de aire y nunca depositarse en la capa de escarcha.

En las figuras 5.6 y 5.7 se muestra la comparación de los perfiles en la fracción volumen de la escarcha para diferentes valores de  $x$  y diferentes condiciones u1h1 y u2h2, a dos tiempos distintos; en el eje horizontal se grafica la altura  $y$ , mientras que en el eje vertical se grafica la fracción de volumen de escarcha  $\alpha_s$ . Se observa que el efecto con-



**Figura 5.4:** Comparación de los perfiles de temperatura entre u1h1 y u2h1 para diferentes valores de  $x$  para  $t = 54$  s

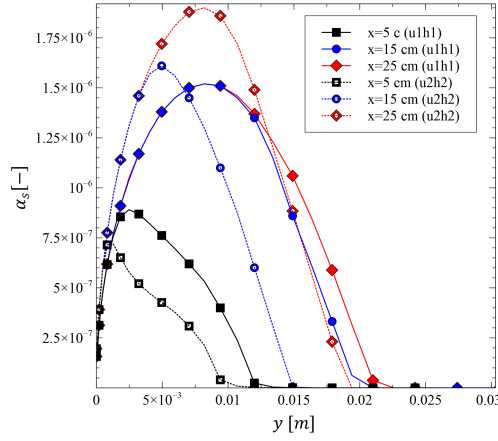
vectivo juega un papel importante en el espesor de la capa de escarcha, representado por un decaimiento de la fracción de sólido a una altura  $y$  menor en el caso de la condición u2h2. De igual manera, la cantidad de humedad influye notablemente en el valor máximo de dicha fracción. Por el contrario, al avanzar el tiempo, la fracción de volumen de sólido tiende a ser mayor para la condición u1h1, esto se explica debido a que una menor velocidad conlleva a un mayor tiempo de residencia de la humedad, haciendo que se pueda depositar más fácilmente que si se mueve con mayor velocidad.



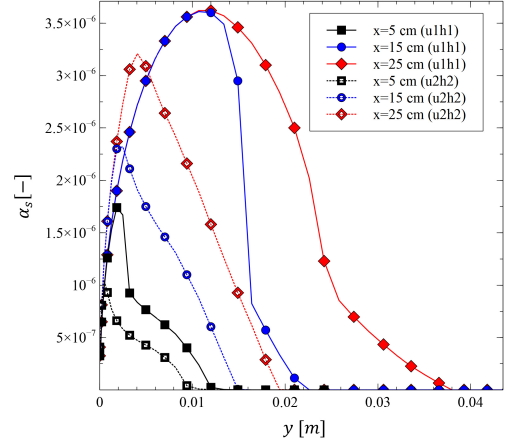
**Figura 5.5:** Comparación de la distribución de fracción de volumen de sólido entre u1h1 y u2h2 para  $t = 54$  s

Por otro lado, en las figuras 5.8 y 5.9 se observa la comparación entre los perfiles para diferentes tiempos y diferentes condiciones para dos valores de  $x$  distintos. Se advierte que para  $x = 0.1$  m los perfiles son complicados y además los valores máximos para u2h2 son mucho menores que para u1h1, esto, como ya se mencionó, se debe al efecto convectivo del aire que no permite que se deposite la humedad en la placa. Por otro lado al avanzar en la longitud de la placa hasta  $x = 0.3$  m la escarcha se desarrolla de manera más uniforme debido a que el perfil de velocidades se ha desarrollado en su totalidad. En este caso al ser la capa de escarcha más gruesa, forma puntos de estancamiento promoviendo así la deposición de la escarcha y alcanzando valores más altos de fracción de volumen.

Se observa que la distribución de fracción no es consistente con los resultados esperados, debido a que se observa un mínimo cercano a la placa fría donde se espera que exista un máximo de concentración de hielo. Debido a esto se realizaron modificaciones al código para corregir este problema. Se definió el dominio final de  $0.5$  cm de alto (sólo



**Figura 5.6:** Perfiles de fracción de volumen de sólido para diferentes valores de  $x$  a  $t = 26$  s



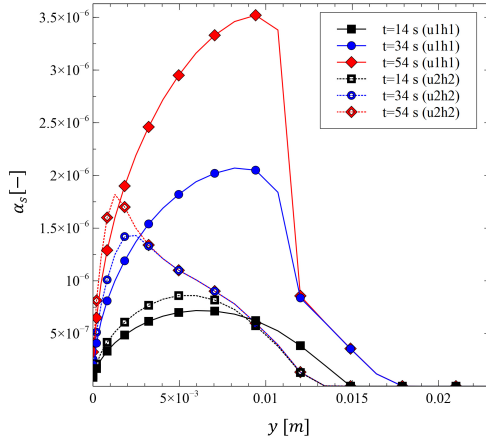
**Figura 5.7:** Perfiles de fracción de volumen de sólido para diferentes valores de  $x$  a  $t = 54$  s

la mitad del canal por efectos de simetría) y 5 cm de largo (longitud común de una aleta en un evaporador comercial). Los resultados generados para la distribución de velocidades y temperatura fueron muy similares por lo que no se muestran. La única diferencia fue la distribución de fracción de volumen de escarcha mostrada en la Figura 5.10. En esta imagen se observa que el valor de la fracción de volumen de hielo va en aumento desde la placa fría hacia la interfaz entre la escarcha y el flujo de aire. Lamentablemente la rapidez de crecimiento de la fracción de volumen fue mucho menor al esperado y por cuestiones de tiempo de cómputo resultó complicado estudiar más situaciones probando diferentes parámetros para el modelo de nucleación. Por lo anterior, la exploración de dicho modelo será dejado como trabajo a futuro.

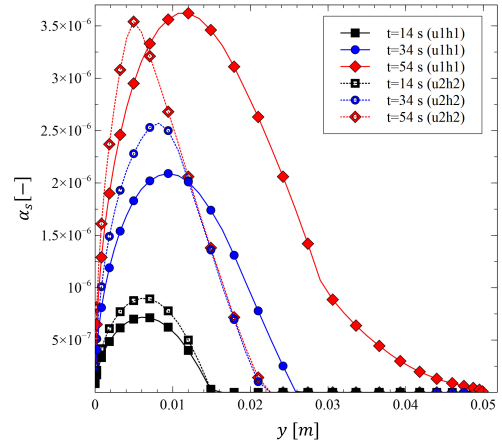
En la Figura 5.11 se observa el espesor de la escarcha a lo largo de la placa fría para diferentes tiempos, alcanzando como máximo un espesor de 1.68 mm representando un 33.6 % de la altura del canal. Estos valores coinciden con los resultados de la simulación a un tiempo de una hora, presentada por Lenic [24].

Además, en la Figura 5.12 se muestran los perfiles de fracción de volumen de sólido para diferentes valores de  $x$ , Observamos que a medida que se avanza en la dirección posi-

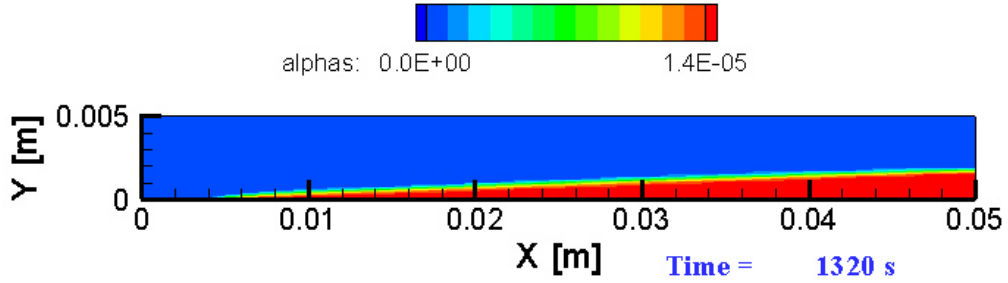




**Figura 5.8:** Perfiles de fracción de volumen de sólido para diferentes tiempos a  $x = 0.1$  m

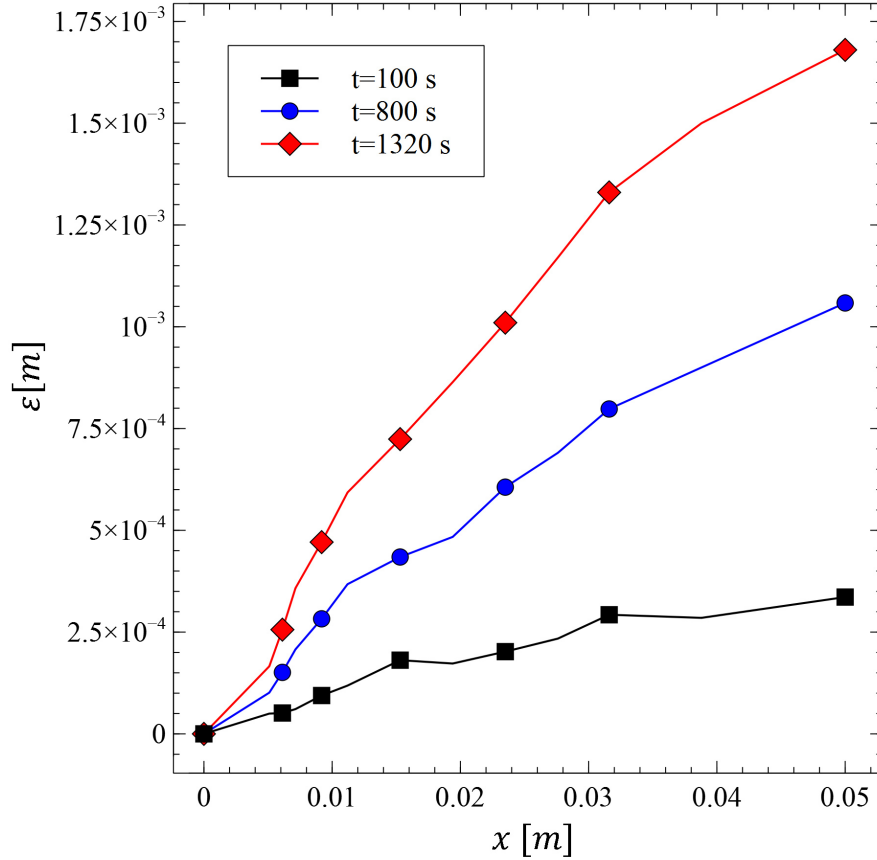


**Figura 5.9:** Perfiles de fracción de volumen de sólido para diferentes tiempos a  $x = 0.3$  m



**Figura 5.10:** Distribución de fracción de volumen de sólido para  $t = 1320$  s y a condición u1h1.

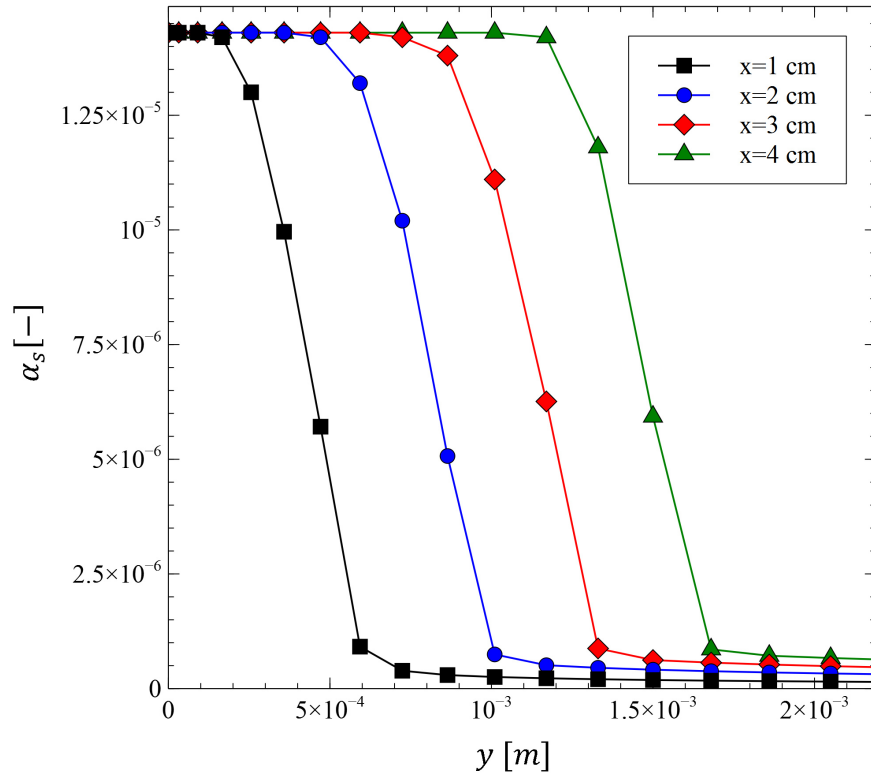
tiva  $x$  el espesor de la escarcha es cada vez mayor y ya no se observan valores mínimos en las cercanías de la placa fría, lo que coincide con los resultados reportados en la literatura por Cui en 2011 [19]. Por otro lado, se esperaba que la fracción de sólido dentro de la escarcha tuviera una distribución más amplia, sin embargo, se observa que esta permanece prácticamente constante para todo el espesor de la escarcha y decae abruptamente en la interfaz escarcha-aire. Este detalle también debe revisarse en trabajos futuros.



**Figura 5.11:** Espesor de la escarcha a lo largo de la placa fría para la condición u1h1.

## 5.2. Variación de las propiedades de la escarcha

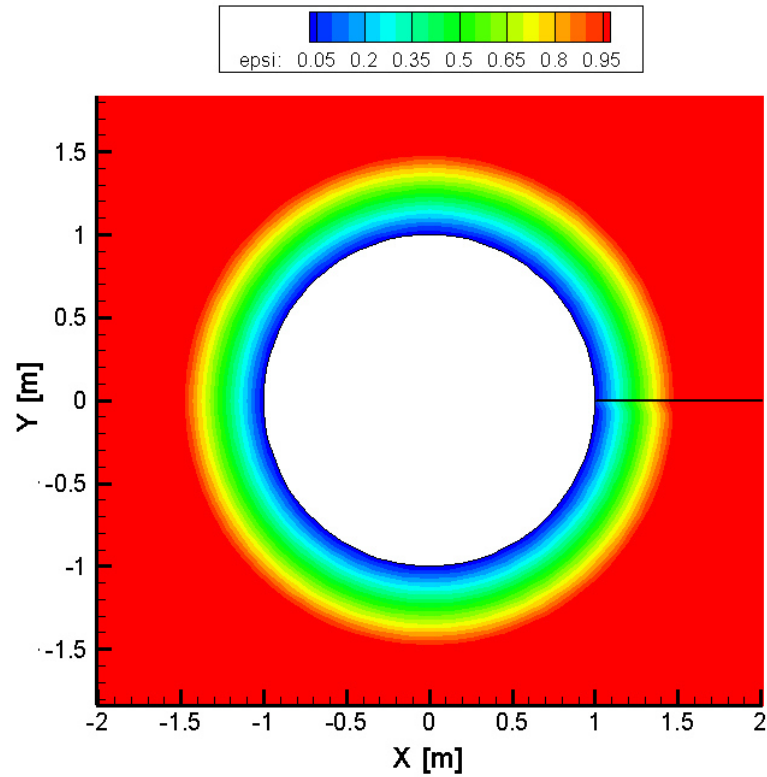
Primeramente se realizaron pruebas para la estimación de la variación de las propiedades de la escarcha como un medio poroso en función de la porosidad o fracción de volumen de sólido. Se definió una distribución de fracción de volumen de sólido uniforme tomando un valor de uno en las inmediaciones de la superficie fría y cero en la interfaz de la capa porosa (Figura 5.13). Se obtuvo una solución en coordenadas cilíndricas resolviendo solamente el campo de velocidades y de temperatura sin introducir fracción másica del vapor de agua ni la fracción de volumen del sólido. Las propiedades tales co-



**Figura 5.12:** Perfiles de fracción de volumen para diferentes valores de  $x$  a  $t = 1320$  s y condición u1h1.

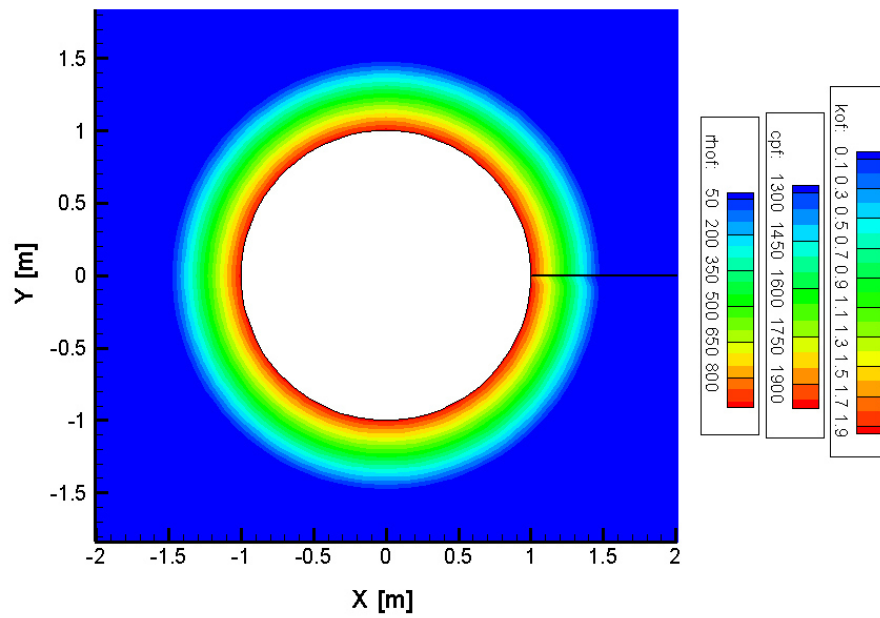
mo la densidad, calor específico y conductividad térmica fueron calculadas de acuerdo con las ecuaciones definidas en la Sección 4.3. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 5.14. Se observa claramente la dependencia de las propiedades con la fracción de volumen de sólido. Es notable que las propiedades toman valores de las propiedades correspondientes al aire en las inmediaciones de interfaz y correspondientes al hielo en las cerca de la superficie fría. Esto es importante debido a que se espera que la variación de las propiedades tales como densidad y conductividad térmica influyan considerablemente en el campo de temperaturas afectando así la rapidez de deposición de escarcha.

De igual manera se presentan las distribuciones de velocidad (Figura 5.15) y de temperatura (Figura 5.16) para el modelado en coordenadas cilíndricas. Cabe recordar que en

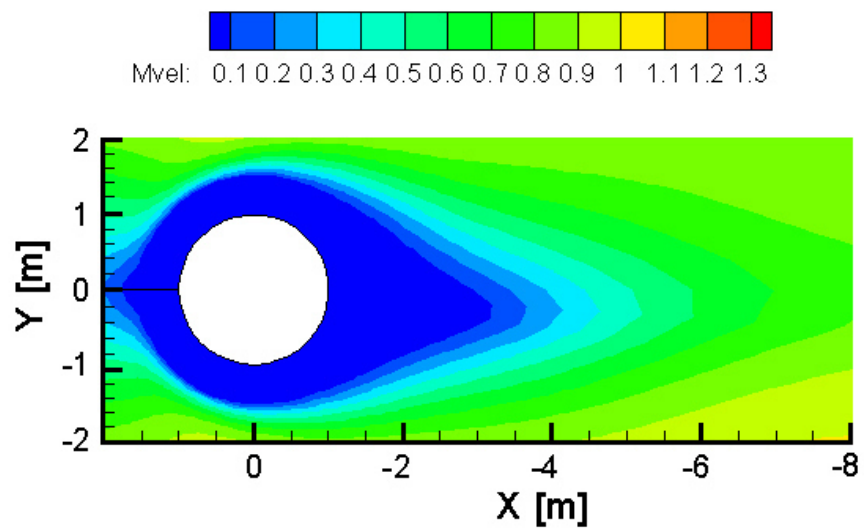


**Figura 5.13:** Distribución de porosidad alrededor del cilindro interior.

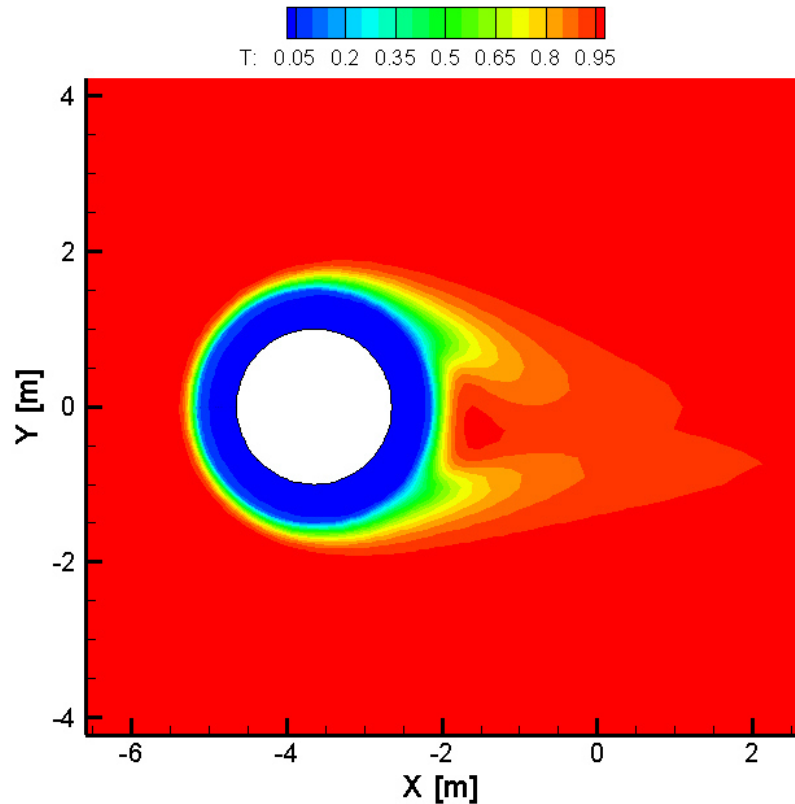
esta corrida no se resolvieron la fracción de volumen de sólido, ni la fracción másica de humedad, sino que se definió una distribución de porosidad variando el valor desde 1 en el cilindro interior ( $r = 1 \text{ cm}$ ) hasta 0 a un espesor de  $5 \text{ mm}$  ( $r = 1.5 \text{ cm}$ ). Estas distribuciones de velocidad y temperatura, así como la estela formada por el obstáculo son típicos de flujo externo alrededor de objetos [50].



**Figura 5.14:** Distribución de densidad, conductividad térmica y calor específico dentro de la capa de escaracha



**Figura 5.15:** Acercamiento a la estela generada por el cilindro.



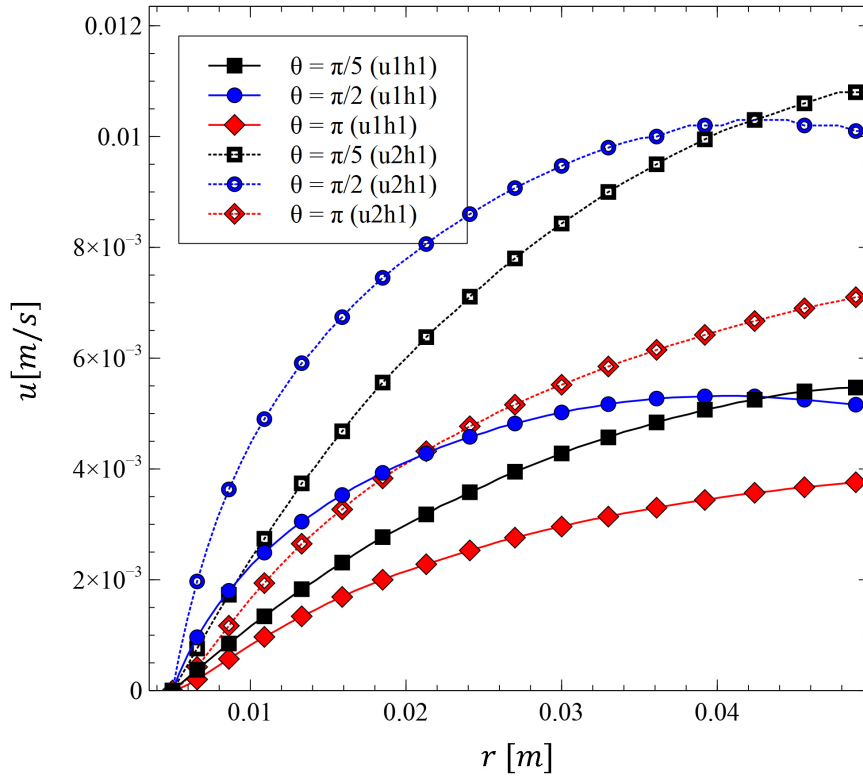
**Figura 5.16:** Distribución de temperaturas en coordenadas cilíndricas

### 5.3. Coordenadas cilíndricas

Una vez realizadas las pruebas de los modelos en coordenadas rectangulares y habiendo validado que se producen resultados consistentes con los reportados en la literatura, se procedió a modificar el código numérico para tomar en cuenta el cambio de coordenadas. Se analizaron las mismas cuatro condiciones para el caso de las coordenadas cilíndricas. Sin embargo, se requiere de mucho tiempo de cómputo para realizar una investigación más profunda sobre los modelos de predicción de formación y densificación de escarcha. Por lo anterior, se concluyó el estudio del proceso transitorio y se reporta en este trabajo una distribución de fracción de volumen de sólido relativamente baja, por lo que los

efectos de la cantidad de humedad a la entrada del dominio no pudieron ser cuantificados satisfactoriamente. Es por eso que las diferencias significativas entre los diferentes casos de estudio se dan entre aquellos realizados a distintas velocidades. Las tendencias fueron similares a las obtenidas con los estudios previos y los perfiles de velocidad y temperatura se muestran en las figuras 5.17 y 5.18. Para el caso de la velocidad observamos que los perfiles siguen la misma tendencia para ambas condiciones, mientras que para la condición  $u_{2h1}$ , los perfiles tienen valores más elevados de velocidad. Es evidente un aumento de velocidad conforme  $r$  se aleja del cilindro interior debido a la condición de no deslizamiento, donde las velocidades más bajas se dan cerca del cilindro. Por otro lado, para  $\theta = \pi/2$  existe un aumento de velocidad más pronunciado, debido a que, por continuidad, el fluido se acelera a ambos lados del cilindro. En el caso de la temperatura observamos que, por ejemplo, para  $\theta = \pi/2$ , la temperatura de congelación del vapor de agua  $T = 0^\circ C$  se ubica a un radio menor para la condición  $u_{2h1}$ , esto hace que necesariamente la capa de escarcha sea más angosta para dicha condición.

En la Figura 5.19 se presentan los espesores de la escarcha correspondientes a 3600  $s$  para cada uno de los casos de estudio ( $u_{1h1}$  y  $u_{2h1}$ ). En el eje horizontal se grafica el ángulo de 0 a  $2\pi$ , mientras que en el eje vertical se tiene el espesor de la escarcha correspondiente a cada ángulo. Se puede observar que a mayor velocidad el espesor de la capa de escarcha es menor debido a que la velocidad del viento promueve el transporte de las partículas de hielo por convección evitando así que se lleguen a depositar en la superficie de la escarcha. De igual manera la velocidad promueve la transferencia de calor por convección por lo que los perfiles de temperatura (Figura 5.18) se encuentran más cercanos a la superficie fría, haciendo que la isoterma de solidificación del vapor de agua se encuentre más cerca al cilindro. En la Figura 5.20 se muestra la relación entre el espesor de la escarcha a diferentes ángulos  $\theta$  y el espesor promedio para cada una de las condiciones  $u_{1h1}$  y  $u_{2h1}$ . Es notable que en el punto de estancamiento de la velocidad los espesores se encuentran por debajo del promedio, y mientras se avanza hacia las zonas inferior y

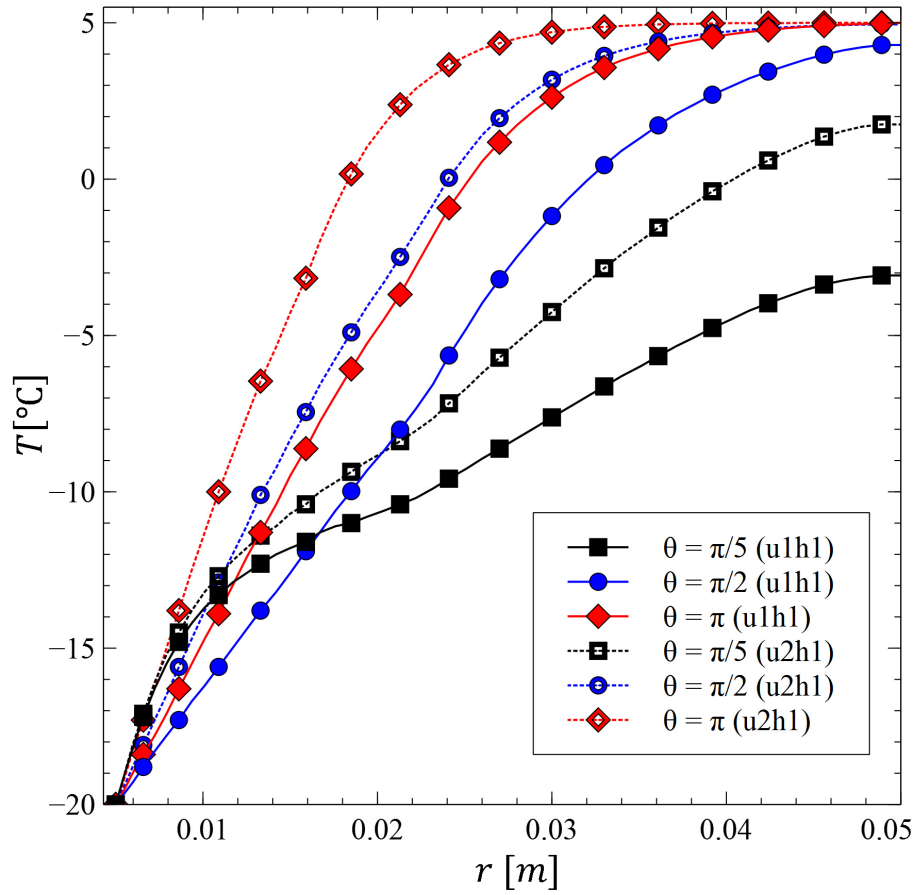


**Figura 5.17:** Perfiles de la magnitud de velocidad para varias posiciones angulares a las condiciones u1h1 y u2h1 a  $t = 3600$  s

superior del cilindro, los espesores comienzan a aumentar debido a que la aceleración del fluido promueve una transferencia de masa por convección mayor, permitiendo así que se deposite una mayor cantidad de humedad en dichas zonas. Posteriormente, en la parte trasera del cilindro decae abruptamente dicho espesor, debido a la separación de la capa límite y al efecto de la recirculación, además de que en esta zona la cantidad de humedad presente en el aire es menor debido a que ya se ha depositado parte de ella en otras zonas del cilindro.

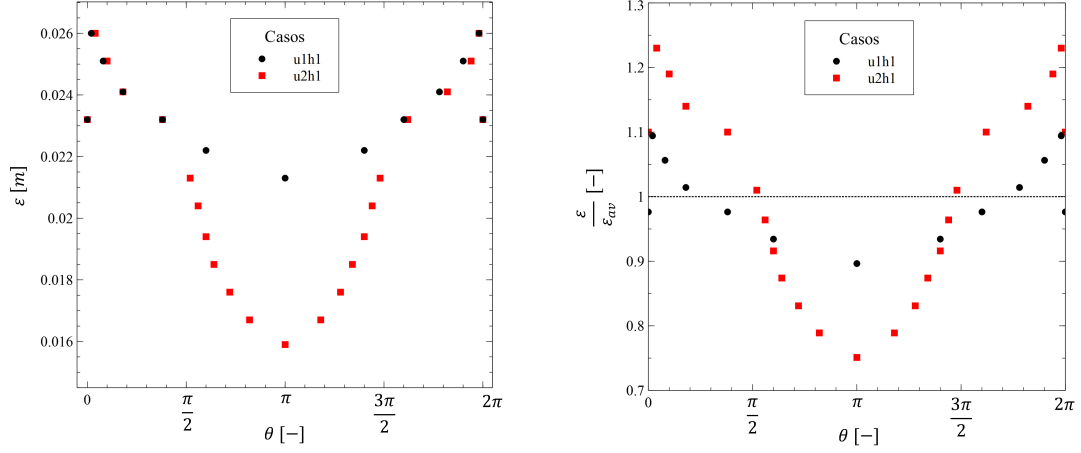
La Figura 5.21 muestra la fracción de volumen de la fase sólida como función del espesor adimensional,  $\varepsilon_a = r/\varepsilon_{max}$ , a diferentes tiempos y a distintos ángulos. Se observa que para  $\theta = \pi/2$  existe una distribución más o menos homogénea en la primera mitad





**Figura 5.18:** Perfiles de temperatura para varias posiciones angulares a las condiciones u1h1 y u2h1 a  $t = 3600 \text{ s}$

de la capa de escarcha y al pasar dicho límite sufre un decaimiento brusco hasta un valor muy pequeño en la interfaz entre la escarcha y el fluido. Este fenómeno no se presenta para  $\theta = \pi$ , donde la distribución es más homogénea para toda la capa de escarcha con una ligera tendencia a disminuir conforme aumenta el radio. Esto puede ser debido a que el ángulo  $\theta = \pi$  se encuentra justamente en la zona de estancamiento y puede ser que la humedad se acumule en esa zona, haciendo que los gradientes radiales de humedad sean muy pequeños y por lo tanto no existe gran diferencia en la cantidad de humedad que se deposita a diferentes radios. Finalmente, es evidente que con el paso del tiempo, el valor



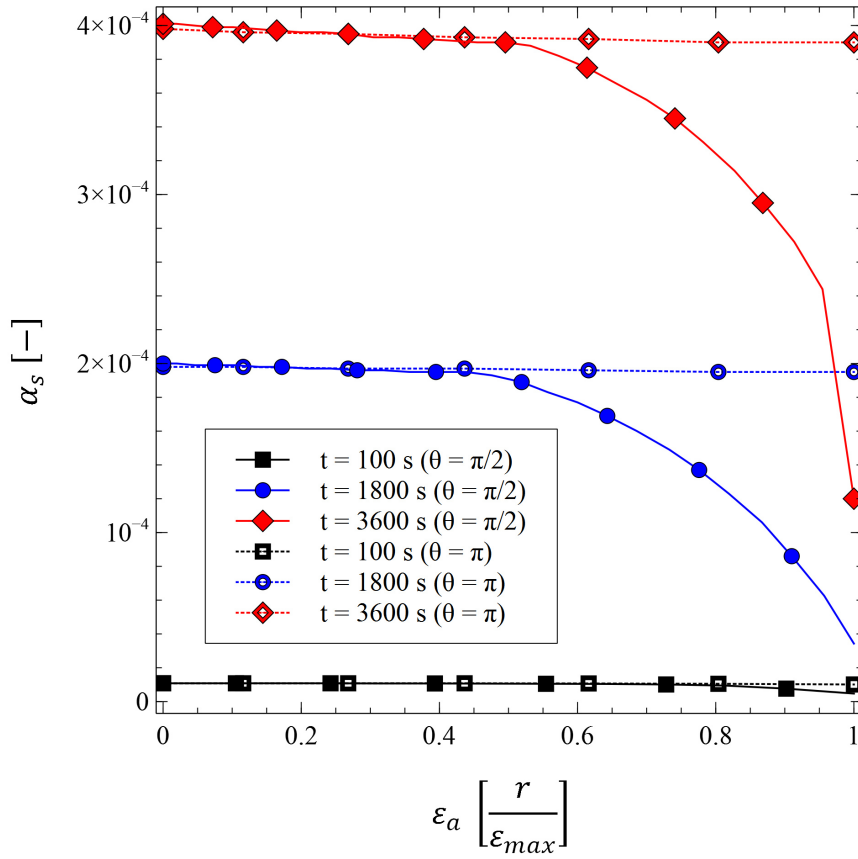
**Figura 5.19:** Espesor de la capa de escarcha alrededor del cilindro para los casos u1h1 y u2h1 a  $t = 3600$  s. **Figura 5.20:** Relación del espesor respecto al promedio para cada condición, u1h1 y u2h1 a  $t = 3600$  s

de la fracción de volumen de la fase sólida aumenta debido a la humedad que se acumula dentro de la capa de escarcha.

Dentro de esta capa de escarcha, al existir una distribución de fracción de volumen interna, las propiedades físicas varían con ésta. En la Figura 5.22 se muestra una densidad adimensional de la escarcha,

$$\rho_a = \frac{\rho_f - \rho_g}{\rho_s - \rho_g}, \quad (5.1)$$

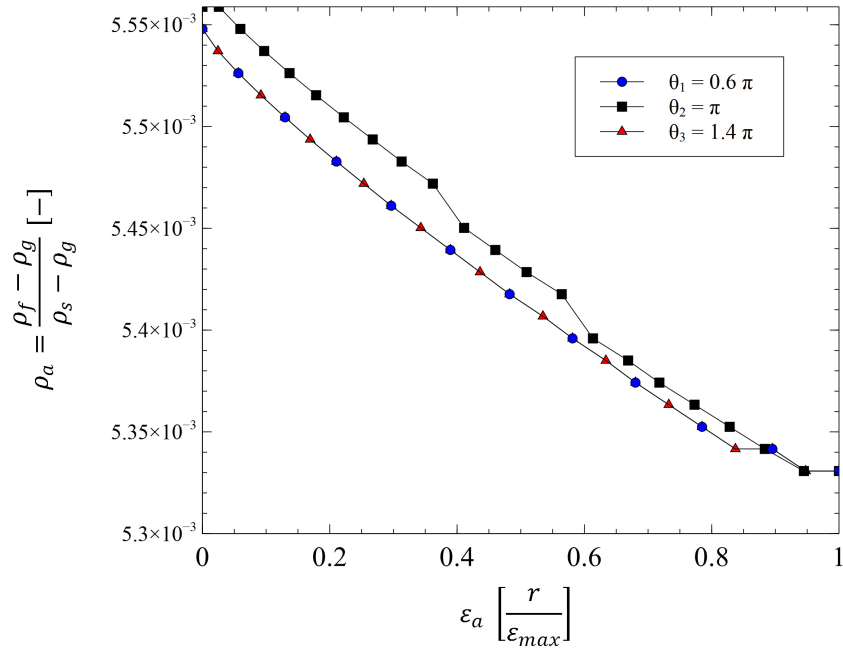
la cual varía desde la densidad del gas hasta la densidad del sólido, esto en función de un espesor adimensional  $\varepsilon_a = r/\varepsilon_{max}$ , obtenido al dividir diferentes radios entre el espesor máximo de la escarcha para cada ángulo adimensional. Se encontró que la distribución de fracción de volumen de escarcha calculada conduce a un cálculo de los valores de densidad de escarcha muy parecidos a la densidad del gas y por ese motivo, la densidad adimensional tiene valores muy pequeños. A pesar de esto se observa una tendencia hacia una disminución en la densidad conforme se avanza hacia el exterior de la capa de escarcha. Esto está en concordancia con los resultados publicados por otros autores para la contraparte rectangular [19]. Se observa también que las distribuciones de densidad para los



**Figura 5.21:** Perfiles de fracción de volumen en función del espesor adimensional  $\varepsilon_a$  a diferentes tiempos y distintos ángulos  $\theta$  para la condición u1h1

espesores adimensionales  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son idénticos, esto es debido a que las propiedades tales como la densidad se calculan en función de la temperatura, y al ser la distribución de ésta simétrica respecto al plano horizontal, se obtienen resultados idénticos en el hemisferio superior e inferior del dominio.

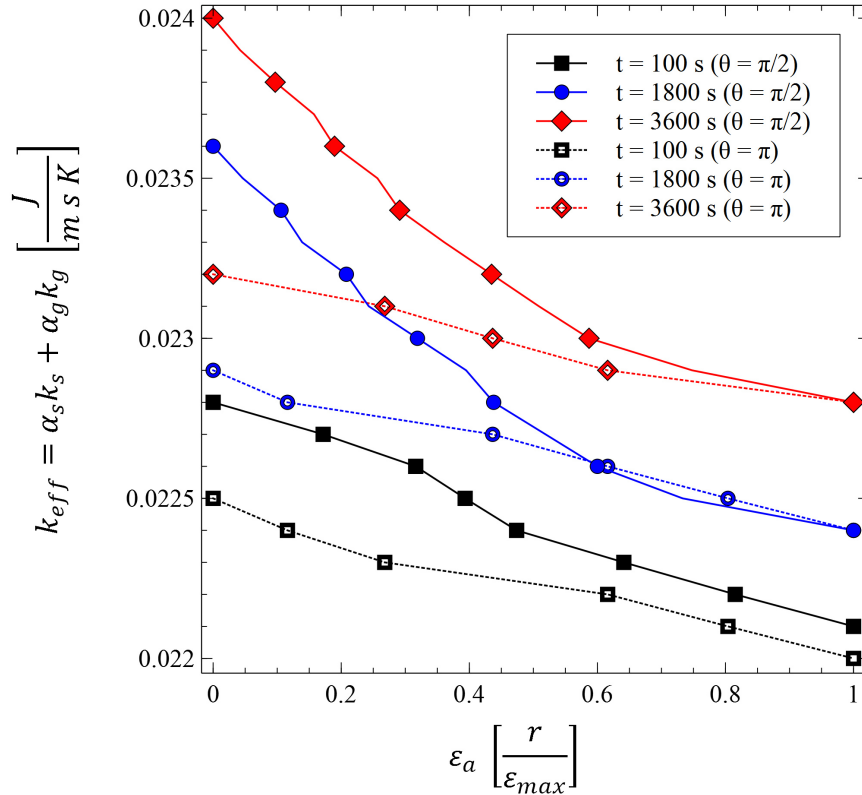
Otra propiedad que varía con la fracción de volumen, es la conductividad térmica efectiva dentro de la capa de escarcha que forma un medio poroso. Ésta se calcula mediante un promedio ponderado, tomando en cuenta los valores de conductividad térmica de cada fase y sus respectivas fracciones de volumen,



**Figura 5.22:** Distribución de densidad adimensional en función del espesor adimensional de la capa de escarcha para diferentes ángulos adimensionales a  $t = 3600$  s y a condición u1h1.

$$k_{eff} = \alpha_s k_s + \alpha_g k_g, \quad (5.2)$$

de manera que a mayor fracción de volumen de sólido, la conductividad térmica efectiva tomará valores más altos tendiendo al valor de la fase sólida pura, y viceversa. La Figura 5.23 muestra la variación de la conductividad térmica efectiva en función de un espesor adimensional. Se observa que para ciertos tiempo y ángulo definidos,  $k_{eff}$  disminuye conforme se aleja de la superficie fría, esto es debido a que la fracción de volumen de sólido tiende a ser mayor en las inmediaciones de la superficie del cilindro. Luego, es notable que para un ángulo  $\theta$  fijo, los valores de  $k_{eff}$  crecen con el paso del tiempo, esto es debido a la humedad que se deposita, la cual aumenta la fracción de volumen de sólido, haciendo la escarcha cada vez más densa y aumentando su conductividad térmica. Finalmente, para



**Figura 5.23:** Variación de la conductividad térmica efectiva en función del espesor adimensional de la capa de escarcha para diferentes tiempos y a distintos ángulos para la condición u1h1.

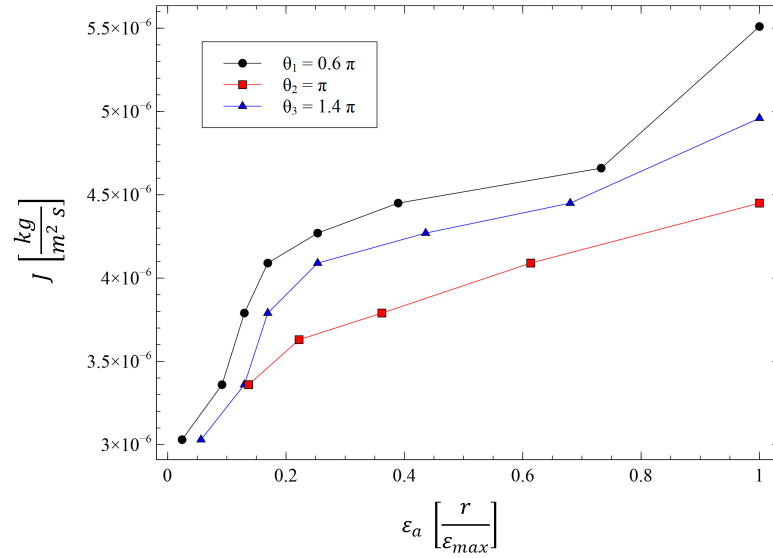
un tiempo dado, se observa que el cambio en la conductividad térmica efectiva no es igual para los distintos ángulos  $\theta$ . Esto puede deberse a la distribución de fracción de volumen dentro de la escarcha, donde a  $\theta = \pi/2$  se ha concentrado más hielo en la superficie en comparación con  $\theta = \pi$ .

La variación en la densidad de la escarcha se debe a una distribución de fracciones de volumen de sólido, y esta a su vez es causada por una transferencia de masa del vapor de agua a lo largo de la capa de escarcha. En la Figura 5.24 se describe la transferencia de masa representada por el flujo de masa radial, resultado de la aplicación de la primera Ley de Fick en el interior de la escarcha,

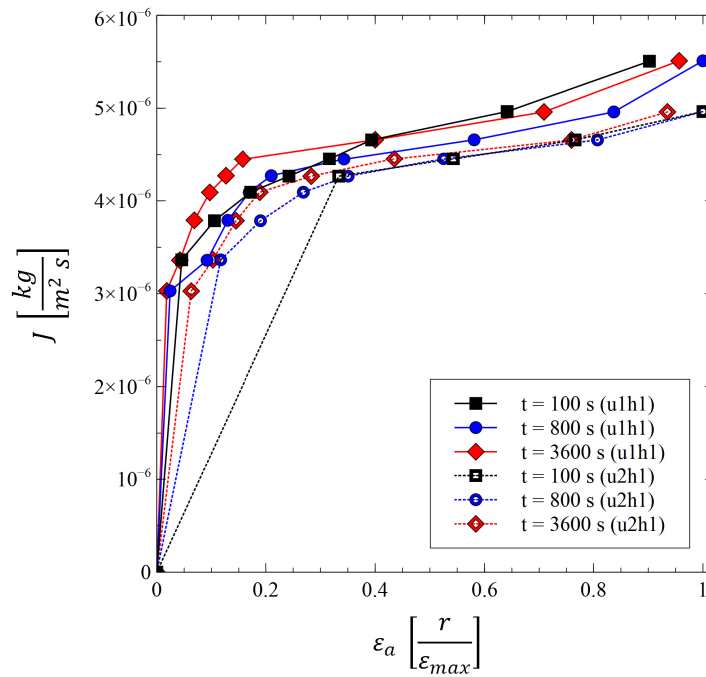
$$J_r = -\rho D_{eff} \frac{\partial Y_i}{\partial r}, \quad (5.3)$$

desde el espesor adimensional  $\varepsilon_a = 1$ , i.e. la interfaz entre la escarcha y el aire húmedo, hasta  $\varepsilon_a = 0$ , correspondiente a la superficie del cilindro, para diferentes ángulos  $\theta$ . Observamos que para cada uno de los ángulos la tendencia del flujo de masa es a disminuir conforme se acerca al cilindro frío. Este comportamiento se debe a que la fracción de volumen de sólido aumenta en la misma dirección, y ésta a su vez influye en la difusividad másica efectiva, dada por la ecuación (4.8). El aumento en la fracción de volumen de sólido hace que la porosidad disminuya, los espacios libres para que circule el aire son menores y el transporte se hace cada vez más complicado. Esto se ve reflejado en una menor velocidad del gas y en una reducción en la cantidad de masa de humedad que se transporta en el aire. Las diferencias entre los valores de transferencia de masa para los tres ángulos se deben principalmente a las variaciones de la difusividad másica efectiva causados por las diversas variables, tales como presión, temperatura o fracción de volumen de hielo.

La Figura 5.25 muestra la variación del flujo de masa a lo largo del espesor de la escarcha para diferentes y a distintas condiciones, a un ángulo  $\theta = \pi/2$ . Se observa que en general para la condición u1h1 existe un mayor flujo de masa a pesar de que los valores son muy parecidos para las dos condiciones y para todos los tiempos analizados. Esto es debido a que el flujo de masa es calculado en la dirección radial, aunque la componente tangencial de la velocidad domina en dicha zona, dentro de la escarcha el transporte es predominantemente difusivo en los casos estudiados por lo que los flujos dependen principalmente de los gradientes. Por otro lado, para la condición u1h1, se observa que el mismo valor de flujo de masa ocurre a distintos espesores con una tendencia que no es proporcional al tiempo transcurrido, esto puede deberse a fluctuaciones en los valores de fracción de volumen de sólido, la cual influye en las propiedades tales como la difusividad térmica y densidad, que a su vez son utilizadas para el cálculo del flujo de masa.



**Figura 5.24:** Flujo de masa a lo largo del espesor de la escarcha para diferentes ángulos a  $t = 3600$  s y condición u1h1.



**Figura 5.25:** Flujo de masa a lo largo del espesor de la escarcha para diferentes tiempos y a distintas condiciones a  $\theta = \pi/2$ .

## CAPÍTULO

### 6

## CONCLUSIONES

En conclusión, fue posible, mediante la solución de las ecuaciones de conservación, predecir el crecimiento de la escarcha en cilindros con flujo cruzado. Asimismo se predijeron los cambios en las propiedades físicas, e.g. densidad y conductividad térmica, al integrar modelos que relacionan la variación de las propiedades de un medio poroso en función de la propia porosidad.

Todo esto se logró mediante el desarrollo de un código numérico que, mediante el método de los volúmenes finitos, resuelve las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento, materia y energía, así como la formación y crecimiento de escarcha alrededor de superficies planas y sobre el cilindro. Por cuestiones de recursos computacionales es necesario seguir trabajando para reproducir con todo detalle la densificación de la escar-



cha.

Mediante una búsqueda exhaustiva se identificaron las ecuaciones que gobiernan el fenómeno a resolver. Por un lado se identificaron las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento, materia y energía que aplicaran correctamente al caso de estudio que deseamos resolver, i.e. flujo de fluido en medio continuo y en medio poroso. Posteriormente se determinó cuál de todos los modelos se adaptaría mejor a nuestra metodología para predecir la cantidad de materia de vapor de agua que sufriría el cambio de fase de gas a sólido con el fin de modelar la formación y el crecimiento de la escarcha. Finalmente se hizo una búsqueda de correlaciones de relacionaran las propiedades físicas de la escarcha con la porosidad de la misma, a su vez que se toma en cuenta la influencia de la temperatura en dichas propiedades.

Una vez que se ensambló el modelo matemático completo se procedió a hacer la discretización de dicho modelo en un esquema de volúmenes finitos para la posterior elaboración de un código numérico que resuelva dichas ecuaciones discretizadas aplicando un algoritmo SIMPLE para el acoplamiento de la presión y velocidad, y un método de solución TDMA para resolver el sistema de ecuaciones resultante de la discretización.

El proceso se dividió en dos partes, primero se aplicó la metodología descrita en coordenadas rectangulares a un canal de aire con una placa fría en la frontera inferior y un plano de simetría en la frontera superior simulando así el espacio entre las aletas de un evaporador de refrigerador típico. Posteriormente se aplicó la misma metodología para realizar un estudio en coordenadas cilíndricas donde se tiene un cilindro interior con una temperatura fija, fría y por otro lado, la frontera exterior del hemisferio izquierdo del dominio corresponde a la entrada de aire, mientras que el hemisferio derecho supone una salida de fluido. Se obtuvieron los resultados numéricos de las simulaciones y se compararon con aquellos de la literatura.

Para el estudio en coordenadas rectangulares se obtuvieron perfiles de velocidad y temperatura consistentes con el de un problema de Poiseuille, documentado en literatura

diversa de dinámica de fluidos. Por otro lado, el espesor de escarcha obtenido fue comparable con los resultados presentados por Lenic en 2009 para una simulación a un tiempo de una hora, mismos que a su vez fueron comparados con resultados experimentales obtenidos en el mismo estudio.

Por el lado del modelado en coordenadas cilíndricas se obtuvieron los perfiles de velocidad y temperaturas, clásicos de un problema de flujo exterior. Se observa la aceleración del fluido en las zonas inferior y superior alrededor de un cilindro, así como el desprendimiento de la capa límite y la generación de una zona de recirculación en la parte posterior del cilindro. Por otro lado, se compararon los espesores de la capa de escarcha para dos de las condiciones clave, donde se nota que la forma de la capa se ve influenciada principalmente por la convección. Se concluye que los espesores más bajos, por debajo del promedio, se producen en el hemisferio izquierdo del cilindro, que es donde impacta la corriente de frente, mientras que los espesores más grandes, por encima del promedio, se generan en la parte posterior del cilindro, donde se desprende la corriente.

Se muestra la variación de las propiedades tales como densidad y conductividad efectiva dentro de la capa de escarcha a diferentes ángulos. Debido a que se producen valores de fracción de volumen de escarcha relativamente bajos, los valores de la densidad adimensional son igualmente bajos y no fue posible observar de manera satisfactoria la influencia de la porosidad en la densidad de la escarcha, en su lugar se observa sobre todo la influencia de la temperatura. Esta densidad comienza en un valor relativamente alto cerca del cilindro interior, indicando mayor presencia de hielo y tiende a disminuir conforme se aleja de la superficie fría indicando una disminución en la fracción de volumen de hielo. De igual manera la conductividad térmica efectiva es afectada tanto por la temperatura como por la fracción de volumen de sólido, empezando por un valor alto cerca del cilindro debido a la concentración de hielo en dicha zona y disminuyendo hacia el exterior de la capa de escarcha.

El flujo de masa es graficado contra un espesor adimensional para diferentes tiempos,

ángulos y condiciones, de manera que podemos observar cómo es que se da la transferencia de masa desde la interfaz de la escarcha con el aire húmedo hasta la superficie del cilindro. Se observa que existe una tendencia a aumentar partiendo desde  $\varepsilon_a = 0$  hacia  $\varepsilon_a = 1$  esto debido a que cerca del cilindro la saturación de hielo es mayor haciendo que el gradiente de concentración sea bajo comparado con las inmediaciones de la interfaz donde el gradiente es alto debido a la baja concentración de hielo en la zona. Se reporta también que el flujo de masa no cambia en gran medida con respecto al tiempo. Esto se debe a los valores bajos de fracción de volumen de sólido obtenidos, ya que al no densificar de una manera consistente, no es posible observar la influencia de la porosidad en la difusión másica.

## 6.1. Trabajo futuro

Se tienen varios puntos que se recomienda mejorar y otros cuantos que se deben agregar al código numérico para robustecerlo:

- Indagar más en el tema del modelo de predicción de la formación de escarcha. Buscar diferentes valores de los parámetros del modelo de nucleación que predigan correctamente la densificación de la escarcha.
- Buscar diferentes modelos de predicción de formación, crecimiento y densificación de escarcha y comparar con el empleado en este estudio para determinar el modelo óptimo.
- Realizar un estudio experimental propio en nuestras instalaciones para tener un punto de comparación directo con los resultados computacionales.
- Llevar a cabo una investigación exhaustiva sobre métodos de aceleración de convergencia del método numérico con el fin de reducir el tiempo de cómputo que se

requiere para llevar a cabo cada experimento numérico.

- Extender el estudio a un banco de tubos típico de un evaporador comercial y posteriormente hacer un estudio tridimensional del evaporador completo incluyendo las aletas de enfriamiento.

# NOMENCLATURA

## Números adimensionales

$Nu$	Número de Nusselt	[–]
$Pe$	Número de Peclet	[–]
$Pr$	Número de Prandtl	[–]
$Re$	Número de Reynolds	[–]

## Símbolos Griegos

$\alpha$	Coeficiente en el método TDMA , véase la ecuación (3.78), página 72	[–]
$\beta$	Coeficiente en el método TDMA , véase la ecuación (3.78), página 72	[–]
$\Delta\phi$	Cambio en la propiedad $\phi$	[–]
$\Gamma$	Coeficiente conductivo para la ecuación discretizada	[–]

$(\delta x)_{e+}$	Distancia entre la cara $e$ y el nodo $E$	$[m]$
$(\delta x)_{e-}$	Distancia entre la cara $e$ y el nodo $P$	$[m]$
$\rho_a$	Densidad adimensional	$[-]$
$\Theta$	Ángulo adimensional	$[-]$
$\theta_i$	Coordenada angular de los nodos en un dominio discreto	$[rad]$
$\varepsilon$	Espesor de la escarcha	$[m]$
$\varepsilon_a$	Espesor adimensional de la escarcha	$[-]$
$\alpha$	Fracción volumétrica	$[-]$
$\Delta t$	Intervalo de tiempo	$[s]$
$\Delta x$	Espesor del volumen finito alrededor del nodo central en la dirección $x$	$[m]$
$\delta x$	Espesor de un elemento diferencial en la dirección $x$	$[m]$
$\Delta y$	Espesor del volumen finito alrededor del nodo central en la dirección $y$	$[m]$
$\delta y$	Espesor de un elemento diferencial en la dirección $y$	$[m]$
$\delta z$	Espesor de un elemento diferencial en la dirección $z$	$[m]$
$(\delta x)_e$	Distancia del nodo central al nodo del este en un dominio discreto.	$[m]$
$(\delta x)_w$	Distancia del nodo central al nodo del oeste en un dominio discreto.	$[m]$
$(\delta y)_n$	Distancia del nodo central al nodo del norte en un dominio discreto.	$[m]$
$(\delta y)_s$	Distancia del nodo central al nodo del sur en un dominio discreto.	$[m]$
$\eta$	Número de partículas de hielo	$[-]$

$\gamma$	Relación de calores específicos	$[-]$
$\lambda$	Segunda viscosidad	$[kg\ m^{-1}\ s^{-1}]$
$\lambda_g$	Coeficiente de transferencia de calor convectivo para una partícula de hielo	$[J\ m^{-2}\ s^{-1}\ K^{-1}]$
$\mu$	Viscosidad dinámica	$[kg\ m^{-1}\ s^{-1}]$
$\Phi$	Generación de calor por disipación viscosa	$[J\ m^{-3}\ s^{-1}]$
$\phi$	Cualquier propiedad de una sustancia	$[-]$
$\rho$	Densidad	$[kg\ m^{-3}]$
$\sigma$	Energía libre interfacial de una partícula de hielo	$[N\ m^{-1}]$
$\tau_{i,j}$	Esfuerzos viscosos efectuados en la dirección $j$ respecto a un plano normal a la dirección $i$	$[N\ m^{-2}]$
$\theta$	Factor de corrección no isotérmico	$[-]$

### Operadores

$\ A, B\ $	El mayor de los valores comparados	$[-]$
$\frac{D}{Dt}$	Derivada material o sustancial	$[s^{-1}]$
$\nabla$	Operador nabla	$[m^{-1}]$

### Símbolos Romanos

$A$	Coeficiente en el método TDMA , véase la ecuación (3.82), página 74	$[-]$
$A$	Área transversal al flujo	$[m^2]$

$a$	Coeficiente discretizado	$[-]$
$b$	Término independiente de la ecuación discretizada	$[-]$
$C$	Coeficiente en el método TDMA , véase la ecuación (3.78), página 72	$[-]$
$c$	Calor específico	$[J\,kg^{-1}\,K^{-1}]$
$C'$	Coeficiente en el método TDMA , véase la ecuación (3.82), página 74	$[-]$
$D$	Coeficiente en el método TDMA , véase la ecuación (3.78), página 72	$[-]$
$D$	Fuerzas difusivas en el método numérico	$[-]$
$d$	Coeficiente para la corrección de presión , véase la ecuación (3.70)	$[-]$
$D_{ij}$	Difusividad másica de la especie $i$ -ésima en la especie $j$ -ésima	$[m^2\,s^{-1}]$
$dV$	Diferencial de volumen	$[m^3]$
$E$	Energía total, véase la ecuación (2.34)	$[J\,m^{-3}]$
$F$	Fuerzas convectivas en el método numérico	$[-]$
$f_e$	Fracción de la distancia correspondiente al volumen alrededor del nodo $E$	$[-]$
$f_t$	Factor de peso para el esquema temporal	$[-]$
$g$	Aceleración de la gravedad	$[m\,s^{-2}]$
$h$	Entalpía específica	$[J\,kg^{-1}]$
$h_{vap}$	Entalpía específica de sublimación	$[J\,kg^{-1}]$
$I$	Tasa de nucleación	$[m^{-3}\,s^{-1}]$



$i$	Energía interna	$[J\,kg^{-1}]$
$i$	nodo $i$ -ésimo	$[-]$
$\mathbf{J}$	Vector de flujo de masa	$[kg\,m^{-2}s^{-1}]$
$J$	Flujo total, difusivo y convectivo , página 61	$[-]$
$j$	nodo $j$ -ésimo	$[-]$
$J_x$	Componente $x$ del vector de flujo de masa	$[kg\,m^{-2}s^{-1}]$
$J_y$	Componente $y$ del vector de flujo de masa	$[kg\,m^{-2}s^{-1}]$
$J_z$	Componente $z$ del vector de flujo de masa	$[kg\,m^{-2}s^{-1}]$
$k$	Conductividad térmica	$[J\,m^{-1}s^{-1}K^{-1}]$
$K_b$	Constante de Boltzmann	$[J\,K^{-1}]$
$L_x$	Longitud total del dominio en la dirección $x$	$[m]$
$L_y$	Longitud total del dominio en la dirección $y$	$[m]$
$\dot{m}_{pq}$	Flujo másico que cambia de la $q$ -ésima a la $p$ -ésima fase	$[kg\,m^{-3}s^{-1}]$
$\dot{m}_{qp}$	Flujo másico que cambia de la $p$ -ésima a la $q$ -ésima fase	$[kg\,m^{-3}s^{-1}]$
$\dot{m}_{va \rightarrow i}$	Densidad de flujo másico que pasa de la fase gaseosa a la fase sólida	$[kg\,m^{-3}s^{-1}]$
$M$	Peso molecular	$[gr\,mol^{-1}]$
$m$	Número de nodos totales en la dirección $y$	$[-]$
$M_w$	Peso molecular de el agua	$[kg\,mol^{-1}]$
$\bar{n}$	Vector unitario	$[-]$

$n$	Número de nodos totales en la dirección $x$	$[-]$
$n_c$	Coefficiente de nucleación	$[-]$
$p$	Presión	$[Pa]$
$\mathbf{q}$	Vector de flujo de calor	$[J\,m^{-2}\,s^{-1}]$
$q_x$	Componente $x$ del vector de flujo de calor	$[J\,m^{-2}\,s^{-1}]$
$q_y$	Componente $y$ del vector de flujo de calor	$[J\,m^{-2}\,s^{-1}]$
$q_z$	Componente $z$ del vector de flujo de calor	$[J\,m^{-2}\,s^{-1}]$
$R$	Constante de gas ideal para el vapor de agua	$[J\,kg^{-1}\,K^{-1}]$
$r$	Radio de una partícula de hielo , véase la ecuación (2.74)	$[m]$
$r^*$	Radio crítico de una partícula de hielo	$[m]$
$R_{ext}$	Radio exterior del dominio	$[m]$
$R_{int}$	Radio interior del dominio	$[m]$
$r_j$	Coordenada radial de los nodos en un dominio discreto	$[m]$
$S$	Término fuente general	$[-]$
$S_{\alpha_q}$	Término fuente de la ecuación de conservación de la fracción de volumen	$[-]$
$S_C$	Parte constante del término fuente general	$[-]$
$S_E$	Fuente de calor	$[J\,m^{-3}\,s^{-1}]$
$S_i$	Término fuente de la ecuación de conservación de energía	$[J\,m^{-3}\,s^{-1}]$

$s_{ij}$	Tasa de deformación lineal	$[s^{-1}]$
$S_M$	Fuente de energía debida al movimiento del fluido	$[J m^{-4}]$
$S_P$	Parte proporcional del término fuente general	$[-]$
$S_u$	Término fuente para la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la componente $x$	$[N m^{-3}]$
$S_v$	Término fuente para la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la componente $y$	$[N m^{-3}]$
$S_w$	Término fuente para la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la componente $z$	$[N m^{-3}]$
$S_Y$	Término fuente de la ecuación de conservación de especies	$[kg m^{-3} s^{-1}]$
$T$	Temperatura	$[K]$
$t$	Tiempo	$[s]$
$\mathbf{u}$	Vector de velocidad	$[m s^{-1}]$
$u$	Componente de la velocidad en la dirección $x$	$[m s^{-1}]$
$v$	Componente de la velocidad en la dirección $y$	$[m s^{-1}]$
$w$	Componente de la velocidad en la dirección $z$	$[m s^{-1}]$
$x_i$	Coordenada $x$ de los nodos en un dominio discreto	$[m]$
$Y_i$	Fracción másica de la especie $i$ -ésima	$[-]$
$y_j$	Coordenada $y$ de los nodos en un dominio discreto	$[m]$

### Superíndices

$'$	Valor de corrección	[–]
$*$	Valor supuesto	[–]
$0$	Del paso de tiempo anterior	[–]

### Subíndices

$A$	De la sustancia $A$ , véase la ecuación (4.15)	[–]
$B$	De la sustancia $B$ , véase la ecuación (4.15)	[–]
$c$	Valor crítico de cierta propiedad, véase la ecuación (4.15)	[–]
$E$	Cara este de un elemento diferencial, véase la ecuación (2.1)	[–]
$E$	El nodo al este del volumen de control	[–]
$e$	La cara este del volumen de control	[–]
$eff$	Valor efectivo de la propiedad en medio poroso	[–]
$f$	De la escarcha	[–]
$g$	Fase gaseosa	[–]
$N$	El nodo al norte del volumen de control	[–]
$n$	La cara norte del volumen de control	[–]
$nb$	Todos los nodos vecinos	[–]
$P$	El nodo central	[–]
$q$	La $q$ -ésima fase	[–]
$S$	El nodo al sur del volumen de control	[–]

$s$	Fase sólida	[–]
$s$	La cara sur del volumen de control	[–]
$sat$	saturación	[–]
$va$	vapor de agua	[–]
$W$	Cara oeste de un elemento diferencial, véase la ecuación (2.1)	[–]
$W$	El nodo al oeste del volumen de control	[–]
$w$	La cara oeste del volumen de control	[–]
$x$	En la dirección del eje $x$	[–]
$y$	En la dirección del eje $y$	[–]

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] R.N Kieft, C.C.M Rindt, and A.A van Steenhoven. The wake behaviour behind a heated horizontal cylinder. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 19(4):183 – 193, 1999.
- [2] V.N. Kurdyumov and A. Liñán. Free and forced convection around line sources of heat and heated cylinders in porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 427:389–409, 1 2001.
- [3] M. Ait Saada, S. Chikh, and A. Campo. Natural convection around a horizontal solid cylinder wrapped with a layer of fibrous or porous material. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 28(3):483 – 495, 2007.
- [4] S. Bhattacharyya, S. Dhinakaran, and A. Khalili. Fluid motion around and through a porous cylinder. *Chemical Engineering Science*, 61(13):4451 – 4461, 2006. The

John Bridgwater Symposium: 'Shaping the Future of Chemical Engineering' The John Bridgwater Symposium.

- [5] S. Bhattacharyya and A.K. Singh. Augmentation of heat transfer from a solid cylinder wrapped with a porous layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(7):1991 – 2001, 2009.
- [6] S Bhattacharyya and AK Singh. Reduction in drag and vortex shedding frequency through porous sheath around a circular cylinder. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 65(6):683–698, 2011.
- [7] A Alper Ozalp and Ibrahim Dincer. Laminar boundary layer development around a circular cylinder: fluid flow and heat–mass transfer characteristics. *Journal of Heat Transfer*, 132(12):121703, 2010.
- [8] Anindita Bhattacharya and G.P. Raja Sekhar. Potential flow past a slightly deformed porous circular cylinder. *Transport in Porous Media*, 81(3):367–389, 2010.
- [9] Peng Yu, Yan Zeng, Thong See Lee, Xiao Bing Chen, and Hong Tong Low. Numerical simulation on steady flow around and through a porous sphere. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 36(0):142 – 152, 2012.
- [10] Khaled Al-Salem, Hakan F. Oztop, and Suhil Kiwan. Effects of porosity and thickness of porous sheets on heat transfer enhancement in a cross flow over heated cylinder. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 38(9):1279 – 1282, 2011.
- [11] Ali R. Tahavvor and Mahmood Yaghoubi. Prediction of frost deposition on a horizontal circular cylinder under natural convection using artificial neural networks. *International Journal of Refrigeration*, 34(2):560 – 566, 2011.

- [12] Saman Rashidi, Ali Tamayol, Mohammad Sadegh Valipour, and Nima Shokri. Fluid flow and forced convection heat transfer around a solid cylinder wrapped with a porous ring. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 63(0):91 – 100, 2013.
- [13] Ching-Yang Cheng. A boundary layer analysis of heat transfer by free convection from permeable horizontal cylinders of elliptic cross-section in porous media using a thermal non-equilibrium model. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 34(5):613 – 622, 2007.
- [14] X.B. Chen, P. Yu, S.H. Winoto, and H.T. Low. Numerical analysis for the flow past a porous trapezoidal cylinder based on the stress jump interfacial conditions. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 19(2):223–241, 2009.
- [15] P. Yu, Y. Zeng, T.S. Lee, H.X. Bai, and H.T. Low. Wake structure for flow past and through a porous square cylinder. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 31(2):141 – 153, 2010.
- [16] S. Dhinakaran and J. Ponmozhi. Heat transfer from a permeable square cylinder to a flowing fluid. *Energy Conversion and Management*, 52(5):2170 – 2182, 2011.
- [17] A. Nicolle and I. Eames. Numerical study of flow through and around a circular array of cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, 679:1–31, 7 2011.
- [18] A. J. Basu and A. Khalili. Computation of flow through a fluid–sediment interface in a benthic chamber. *Physics of Fluids*, 11(6):1395–1405, 1999.
- [19] J. Cui, W.Z. Li, Y. Liu, and Z.Y. Jiang. A new time– and space–dependent model for predicting frost formation. *Applied Thermal Engineering*, 31(4):447 – 457, 2011.



- [20] Po-Chuan Huang and Chih-Cheng Chen. Simulation of mixed convection in a vertical channel containing discrete porous-covering heat blocks. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55(11):3147 – 3159, 2012.
- [21] Shiang-Wuu Perng, Horng-Wen Wu, and Tswen-Chyuan Jue. Numerical investigation of heat transfer enhancement on a porous vortex-generator applied to a block-heated channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55(11):3121 – 3137, 2012.
- [22] K.A.R Ismail, C Salinas, and M.M Gonçalves. Frost growth around a cylinder in a wet air stream. *International Journal of Refrigeration*, 20(2):106 – 119, 1997.
- [23] S.P Raju and S.A Sherif. Frost formation and heat transfer on circular cylinders in cross-flow. *International Journal of Refrigeration*, 16(6):390 – 402, 1993.
- [24] Kristian Lenic, Anica Trp, and Bernard Frankovic. Transient two-dimensional model of frost formation on a fin-and-tube heat exchanger. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(1):22 – 32, 2009.
- [25] Rin Yun, Yongchan Kim, and Man ki Min. Modeling of frost growth and frost properties with airflow over a flat plate. *International Journal of Refrigeration*, 25(3):362 – 371, 2002.
- [26] Dong-Keun Yang, Kwan-Soo Lee, and Dong-Jin Cha. Frost formation on a cold surface under turbulent flow. *International Journal of Refrigeration*, 29(2):164 – 169, 2006.
- [27] Kwan-Soo Lee, Sung Jhee, and Dong-Keun Yang. Prediction of the frost formation on a cold flat surface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(20):3789 – 3796, 2003.

- [28] Deniz Seker, Hakan Karatas, and Nilufer Egrican. Frost formation on fin-and-tube heat exchangers. part i. modeling of frost formation on fin-and-tube heat exchangers. *International Journal of Refrigeration*, 27(4):367 – 374, 2004.
- [29] Byeongchul Na and Ralph L. Webb. Mass transfer on and within a frost layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(5):899 – 911, 2004.
- [30] Christian J.L. Hermes, Robson O. Piucco, Jader R. Barbosa Jr., and Cláudio Melo. A study of frost growth and densification on flat surfaces. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 33(2):371 – 379, 2009.
- [31] Ali R. Tahavvor and Mahmood Yaghoubi. Experimental and numerical study of frost formation by natural convection over a cold horizontal circular cylinder. *International Journal of Refrigeration*, 33(7):1444 – 1458, 2010.
- [32] S.K. Padhmanabhan, D.E. Fisher, L. Cremaschi, and E. Moallem. Modeling non-uniform frost growth on a fin-and-tube heat exchanger. *International Journal of Refrigeration*, 34(8):2018 – 2030, 2011.
- [33] Y. Barzanoni, H. Basirat Tabrizi, O. Noorshams, and H. Eftekhari. Correlation for frost properties on a cold cylinder surface in cross flow. *Heat and Mass Transfer*, 48(8):1477–1484, 2012.
- [34] W. Wang, Q.C. Guo, W.P. Lu, Y.C. Feng, and W. Na. A generalized simple model for predicting frost growth on cold flat plate. *International Journal of Refrigeration*, 35(2):475 – 486, 2012.
- [35] Amne El Cheikh and Anthony Jacobi. A mathematical model for frost growth and densification on flat surfaces. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 77(0):604 – 611, 2014.

- [36] Y.-X. Tao, R.W. Besant, and K.S. Rezkallah. A mathematical model for predicting the densification and growth of frost on a flat plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36(2):353 – 363, 1993.
- [37] R. Le Gall, J.M. Grillot, and C. Jallut. Modelling of frost growth and densification. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(13):3177 – 3187, 1997.
- [38] James E McDonald. Homogeneous nucleation of vapor condensation. i. thermodynamic aspects. *Am. J. Phys*, 30(12):870–877, 1962.
- [39] James E McDonald. Homogeneous nucleation of vapor condensation. ii. kinetic aspects. *Am. J. Phys*, 31(1):31–41, 1963.
- [40] Arthur Kantrowitz. Nucleation in very rapid vapor expansions. *The Journal of Chemical Physics*, 19(9):1097–1100, 1951.
- [41] A.G. Gerber and M.J. Kermani. A pressure based eulerian eulerian multi–phase model for non–equilibrium condensation in transonic steam flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(10):2217 – 2231, 2004.
- [42] Roddy Rhodes Rogers. *Short course in cloud physics*. Pergamon press, 1978.
- [43] WE Ranz and WR Marshall. Evaporation from drops. *Chem. Eng. Prog*, 48(3):141–146, 1952.
- [44] Yunus A Cengel, Sanford Klein, and William Beckman. *Heat transfer: a practical approach*. WBC McGraw-Hill Boston, 1998.
- [45] Theodore L Bergman, Frank P Incropera, and Adrienne S Lavine. *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley & Sons, 2011.
- [46] Yunus A Cengel, Michael A Boles, and Mehmet Kanoglu. *Thermodynamics: an engineering approach*, volume 5. McGraw-Hill New York, 2002.

- [47] MM Abbott, JM Smith, and HC Van Ness. *Introduction to chemical engineering thermodynamics*. McGraw-Hill, 2001.
- [48] Don W Green et al. *Perry's chemical engineers' handbook*, volume 796. McGraw-hill New York, 2008.
- [49] John C. Slattery and R. Byron Bird. Calculation of the diffusion coefficient of dilute gases and of the self-diffusion coefficient of dense gases. *AIChE Journal*, 4(2):137–142, 1958.
- [50] Frank M White and Isla Corfield. *Viscous fluid flow*, volume 3. McGraw-Hill New York, 2006.

## APÉNDICE

### A

# COEFICIENTES RESULTANTES DE LA DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE GOBIERNO.

Al aplicar el método numérico descrito en el capítulo 3, a partir de ecuaciones diferenciales, se obtiene una ecuación discretizada de la forma

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + b \quad (\text{A.1})$$

que se aplica a cada uno de los nodos que forman el dominio discreto para así obtener un sistema de ecuaciones lineales simultaneas. Los coeficientes de esta ecuación son di-

ferentes para cada una de sus ecuaciones diferenciales correspondientes y se describen a continuación.

## A.1. Fracción de volumen de sólido

La ecuación diferencial que describe este fenómeno es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s) + \nabla \cdot (\alpha_s \vec{u}_s) = S_{\alpha_s} \quad (\text{A.2})$$

y su discretización resulta en la siguiente ecuación:

$$a_P \alpha_{s_P} = a_E \alpha_{s_E} + a_W \alpha_{s_W} + a_N \alpha_{s_N} + a_S \alpha_{s_S} + b \quad (\text{A.3})$$

donde

$$a_E = \|-F_e, 0\| \quad (\text{A.4a})$$

$$a_W = \|F_w, 0\| \quad (\text{A.4b})$$

$$a_N = \|-F_n, 0\| \quad (\text{A.4c})$$

$$a_S = \|F_s, 0\| \quad (\text{A.4d})$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y + a_P^0 \alpha_{s_P} \quad (\text{A.4e})$$

$$a_P^0 = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (\text{A.4f})$$

$$S_C = \frac{\dot{m}_{va \leftarrow i}}{\rho_P} \quad (\text{A.4g})$$

$$S_P = 0 \quad (\text{A.4h})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y \quad (\text{A.4i})$$

con

$$F_e = u_e \Delta y \quad (\text{A.5a})$$

$$F_w = u_w \Delta y \quad (\text{A.5b})$$

$$F_n = v_n \Delta x \quad (\text{A.5c})$$

$$F_s = v_s \Delta x \quad (\text{A.5d})$$

## A.2. Cantidad de movimiento

La ecuación diferencial que describe la conservación de cantidad de movimiento es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g \vec{u}_g) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \vec{u}_g \vec{u}_g) = -\alpha_g \nabla p + \nabla \cdot (\alpha_g \mu_g \nabla \vec{u}_g) + S_{ug} \quad (\text{A.6})$$

y su discretización resulta en la siguiente ecuación:

$$a_P u_P = a_E u_E + a_W u_E + a_N u_N + a_S u_S + b \quad (\text{A.7})$$

donde

$$a_E = D_w + ||-F_e, 0|| \quad (\text{A.8a})$$

$$a_W = D_e ||F_w, 0|| \quad (\text{A.8b})$$

$$a_N = D_n ||-F_n, 0|| \quad (\text{A.8c})$$

$$a_S = D_s ||F_s, 0|| \quad (\text{A.8d})$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y + a_P^0 u_P^0 \quad (\text{A.8e})$$

$$a_P^0 = \alpha_{gP}^0 \rho_{gP}^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (\text{A.8f})$$

$$S_C = 0 \quad (\text{A.8g})$$

$$S_P = -\dot{m}_{va \leftarrow i} \quad (\text{A.8h})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y \quad (\text{A.8i})$$

con

$$F_e = (\alpha_g \rho_g u)_e \Delta y \quad (\text{A.9a})$$

$$F_w = (\alpha_g \rho_g u)_w \Delta y \quad (\text{A.9b})$$

$$F_n = (\alpha_g \rho_g v)_n \Delta x \quad (\text{A.9c})$$

$$F_s = (\alpha_g \rho_g v)_s \Delta x \quad (\text{A.9d})$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \quad (\text{A.9e})$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \quad (\text{A.9f})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \quad (\text{A.9g})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \quad (\text{A.9h})$$

$$\Gamma = \alpha_g \mu_g \quad (\text{A.9i})$$

La ecuación para la componente  $v$  de la velocidad es exactamente igual solo hay que



intercambiar  $u$  por  $v$  y viceversa.

### A.3. Continuidad

La ecuación de continuidad para este fenómeno es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \vec{u}_g) = S_{mg} \quad (\text{A.10})$$

Al aplicar la metodología descrita en la Sección 3.7 transformamos la ecuación de continuidad en una ecuación de corrección de presión de la forma

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b \quad (\text{A.11})$$

donde

$$a_E = (\alpha_g \rho_g d)_e \Delta y \quad (\text{A.12a})$$

$$a_W = (\alpha_g \rho_g d)_w \Delta y \quad (\text{A.12b})$$

$$a_N = (\alpha_g \rho_g d)_n \Delta x \quad (\text{A.12c})$$

$$a_S = (\alpha_g \rho_g d)_s \Delta x \quad (\text{A.12d})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{A.12e})$$

y

$$b = \alpha_{gP}^0 \frac{(\rho_{gP}^0 - \rho_{gP}) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(\alpha_g \rho_g u^*)_w - (\alpha_g \rho_g u^*)_e] \Delta y + [(\alpha_g \rho_g v^*)_s - (\alpha_g \rho_g v^*)_n] \Delta x \quad (\text{A.13})$$

con

$$d = \frac{A}{a} \quad (\text{A.14})$$

Donde  $A$  es el área transversal de la cara correspondiente y  $a$  es el coeficiente correspondiente de la ecuación de la cantidad de movimiento.

## A.4. Energía

La ecuación diferencial que describe la conservación de energía es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g h_g) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \vec{u}_g h_g) = \nabla \cdot (\alpha_g k_{eff} \nabla T_g) + S_{hg} \quad (A.15)$$

donde la entalpía se sustituye por  $h = \rho c T$  para obtener una ecuación en función de la temperatura de la forma

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_E + a_N T_N + a_S T_S + b \quad (A.16)$$

donde

$$a_E = D_w + ||-F_e, 0|| \quad (A.17a)$$

$$a_W = D_e ||F_w, 0|| \quad (A.17b)$$

$$a_N = D_n ||-F_n, 0|| \quad (A.17c)$$

$$a_S = D_s ||F_s, 0|| \quad (A.17d)$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y + a_P^0 T_P^0 \quad (A.17e)$$

$$a_P^0 = \alpha_{gp}^0 \rho_{gp}^0 c_{gp}^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (A.17f)$$

$$S_C = -\dot{m}_{va \leftarrow i} h_{vap} \quad (A.17g)$$

$$S_P = 0 \quad (A.17h)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y \quad (A.17i)$$

con

$$F_e = \left( \alpha_g \rho_g c_g u \right)_e \Delta y \quad (\text{A.18a})$$

$$F_w = \left( \alpha_g \rho_g c_g u \right)_w \Delta y \quad (\text{A.18b})$$

$$F_n = \left( \alpha_g \rho_g c_g v \right)_n \Delta x \quad (\text{A.18c})$$

$$F_s = \left( \alpha_g \rho_g c_g v \right)_s \Delta x \quad (\text{A.18d})$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \quad (\text{A.18e})$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \quad (\text{A.18f})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \quad (\text{A.18g})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \quad (\text{A.18h})$$

$$\Gamma = \alpha_g k_{eff} \quad (\text{A.18i})$$

## A.5. Especies

La ecuación diferencial que gobierna la conservación de especies es

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_g \rho_g Y_{g,v}) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \vec{u}_g Y_{g,v}) = \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g D_{eff} \nabla Y_{g,v}) + S_{Y_{g,v}} \quad (\text{A.19})$$

Cuya discretización resulta en una ecuación del tipo

$$a_P Y_{g,v_P} = a_E Y_{g,v_E} + a_W Y_{g,v_E} + a_N Y_{g,v_N} + a_S Y_{g,v_S} + b \quad (\text{A.20})$$

donde

$$a_E = D_w + ||-F_e, 0|| \quad (\text{A.21a})$$

$$a_W = D_e ||F_w, 0|| \quad (\text{A.21b})$$

$$a_N = D_n ||-F_n, 0|| \quad (\text{A.21c})$$

$$a_S = D_s ||F_s, 0|| \quad (\text{A.21d})$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y + a_P^0 Y_{g,v_P}^0 \quad (\text{A.21e})$$

$$a_P^0 = \alpha_{g_P}^0 \rho_{g_P}^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (\text{A.21f})$$

$$S_C = -\dot{m}_{va \leftarrow i} \quad (\text{A.21g})$$

$$S_P = 0 \quad (\text{A.21h})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y \quad (\text{A.21i})$$

con

$$F_e = \left( \alpha_g \rho_g u \right)_e \Delta y \quad (\text{A.22a})$$

$$F_w = \left( \alpha_g \rho_g u \right)_w \Delta y \quad (\text{A.22b})$$

$$F_n = \left( \alpha_g \rho_g v \right)_n \Delta x \quad (\text{A.22c})$$

$$F_s = \left( \alpha_g \rho_g v \right)_s \Delta x \quad (\text{A.22d})$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \quad (\text{A.22e})$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \quad (\text{A.22f})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \quad (\text{A.22g})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \quad (\text{A.22h})$$

$$\Gamma = \alpha_g \rho_g D_e f f \quad (\text{A.22i})$$

## A.6. Coordenadas cilíndricas

Para los coeficientes de la ecuación discretizada en coordenadas cilíndricas sólo cambian los parámetros geométricos tales como el espesor de los elementos y la distancia entre nodos. Para el espesor de los nodos basta cambiar  $\Delta x$  por  $r\Delta\theta$  y  $\Delta y$  por  $\Delta r$ ; y para la distancia entre nodos se sustituye  $(\delta x)$  por  $r(\delta\theta)$  y  $(\delta y)$  por  $(\delta r)$ .

Este cambio de coordenadas coloca la dirección que antes era  $x$  como la coordenada angular  $\theta$  y a  $y$  como la coordenada radial  $r$ , de manera que lo que antes era la componente de la velocidad en  $x$ ,  $u$ , ahora será la velocidad angular  $u_\theta$  y la componente  $v$  será la velocidad radial  $u_r$ .

Aplicando estos cambios quedan listos los coeficientes para aplicarlos a un problema en coordenadas cilíndricas.